

Departamento de Estructuras de Edificación  
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid

# **Parámetros de forma en láminas y su incidencia en la eficacia estructural.**

M. Belén Orta Rial  
arquitecto

dirigida por:

Jaime Cervera Bravo  
doctor arquitecto

Mariano Vázquez Espí  
doctor arquitecto

Madrid, 2005.

Tribunal nombrado por el Mgfco. Y Excmo. Sr. Rector de la Universidad  
Politécnica de Madrid, el día.....

Predidente D.....

Vocal D.....

Vocal D.....

Vocal D.....

Secretario D.....

Realizado el acto de defensa y lectura de Tesis el día .....

en.....

Calificación: .....

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

# Índice

<b>Capítulo 1</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1	Estructuras tipo lámina .....	2
1.2	Breve descripción de los contenidos.....	2
1.3	Nomenclatura.....	4
1.4	Agradecimientos .....	5
<b>Capítulo 2</b>	<b>Imitación de la naturaleza .....</b>	<b>7</b>
2.1	Modelos de estructuras en la naturaleza .....	7
2.1.1	El árbol.....	9
2.1.2	Esqueleto de caballo.....	12
2.1.3	La tela de araña .....	13
2.1.4	La cáscara de huevo .....	14
2.1.5	Pompas de jabón y superficies de Plateau.....	15
2.1.6	El erizo de mar .....	17
2.1.7	Radiolarias y cocolitos .....	19
2.1.8	La estructura ósea.....	20
2.2	Los modelos físicos en la búsqueda de formas laminares. ....	21
2.2.1	Modelos suspendidos: .....	22
2.2.2	Modelo homeostático.....	23
2.2.3	Modelos neumáticos. ....	24

2.2.4	Modelos pretensados.....	25
2.3	Simulaciones numéricas .....	26
2.3.1	Imitación a los modelos homeostáticos.....	27
2.3.2	Imitación de los modelos pretensados.....	28
2.3.3	Imitación a los modelos suspendidos.....	29
2.4	Búsqueda de formas laminares en la actualidad: algoritmos matemáticos .....	30
<b>Capítulo 3</b>	<b>Métodos de optimación .....</b>	<b>33</b>
3.1	Descripción del problema .....	33
3.2	Optimación de estructuras .....	38
3.3	Métodos de optimación .....	40
3.3.1	Métodos que emplean la 2ª derivada.....	41
3.3.2	Métodos que emplean la 1ª derivada.....	42
3.3.3	Métodos que únicamente evalúan la función objetivo .....	43
3.4	Algoritmo genético .....	45
3.5	Recocido simulado .....	47
3.5.1	Parámetros para el recocido. ....	51
3.5.2	Comportamiento del Recocido Simulado. ....	54
<b>Capítulo 4</b>	<b>Teoría del diseño de estructuras.....</b>	<b>57</b>
4.1	Proyecto de Estructuras .....	57
4.2	La medida del consumo en estructura .....	59
4.3	Volumen estructural y relación con otras magnitudes.....	60
4.4	Cantidad de estructura traccionada y comprimida.....	62
4.5	Cantidad de estructura horizontal y vertical .....	62
4.6	Caracterización de las soluciones óptimas .....	63
4.6.1	Relaciones .....	67



<b>Capítulo 5</b>	<b>Optimación de láminas.....</b>	<b>69</b>
5.1	Definición del objeto .....	69
5.1.1	Aplicación de cargas .....	72
5.1.2	Análisis y dimensionado .....	72
5.2	Formulación general del problema de diseño.....	73
5.3	Dominio de búsqueda. ....	74
5.3.1	Requisitos estructurales.....	75
5.3.2	Requisitos geométricos y topológicos.....	75
5.4	Mecanismo de generación de láminas .....	77
5.4.1	Generador de alternativas.....	78
5.4.2	Intensidades del generador. ....	80
5.4.3	Otros parámetros .....	81
5.5	Ejemplos numéricos: .....	82
5.6	Ejemplos con base circular .....	85
5.6.1	Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto completo .....	87
5.6.2	Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto positivo .....	90
5.6.3	Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto completo .....	92
5.6.4	Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto positivo .....	94
5.6.5	Configuración inicial para $l_{max}=30\%$ y $20\%$ .....	97
5.6.6	Solución con $l_{max}=30\%$ y recinto completo .....	99
5.6.7	Solución con $l_{max}=30\%$ y recinto positivo .....	102
5.6.8	Solución con $l_{max}=20\%$ y recinto positivo .....	104
5.6.9	Resumen de resultados.....	106
5.7	Ejemplos con base cuadrada con apoyos continuos .....	108
5.7.1	Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto completo .....	111
5.7.2	Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto positivo .....	113
5.7.3	Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto completo .....	115
5.7.4	Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto positivo .....	120
5.7.5	Configuración inicial para $l_{max}=30\%$ .....	123
5.7.6	Solución con $l_{max}=30\%$ y recinto completo .....	124

5.7.7	Solución con $l_{max} = 30\%$ y recinto positivo .....	126
5.7.8	Resumen de resultados.....	129
5.8	Ejemplos de base cuadrada con apoyos puntuales.....	130
5.8.1	Solución con $l_{max} = 30\%$ y recinto positivo .....	133
5.9	Ejemplos de base mixta .....	136
5.9.1	Solución con $l_{max} = 160\%$ y recinto completo y positivo.....	138
5.9.2	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto completo .....	142
5.9.3	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto positivo .....	145
5.9.4	Configuración inicial para $l_{max} = 80\%$ y $40\%$ .....	148
5.9.5	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto completo .....	150
5.9.6	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto positivo .....	151
5.9.7	Solución con $l_{max} = 40\%$ y recinto completo .....	153
5.9.8	Solución con $l_{max} = 40\%$ y recinto positivo .....	156
5.9.9	Resumen de resultados.....	158
5.10	Ejemplos de base rectangular proporción 2/1.....	159
5.10.1	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto completo .....	160
5.10.2	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto positivo .....	164
5.10.3	Solución con $l_{max} = 40\%$ y recinto completo .....	166
5.10.4	Solución con $l_{max} = 40\%$ y recinto positivo .....	169
5.10.5	Resumen de resultados.....	171
5.11	Base rectangular proporción 3/1.....	172
5.11.1	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto completo .....	174
5.11.2	Solución con $l_{max} = 80\%$ y recinto positivo .....	177
5.11.3	Solución con $l_{max} = 40\%$ y recinto completo .....	179
5.11.4	Solución con $l_{max} = 40\%$ y recinto positivo .....	181
5.11.5	Resumen de resultados.....	184
<b>Capítulo 6</b>	<b>Parámetros de forma en láminas.....</b>	<b>185</b>
6.1	Evolución de las soluciones.....	185

6.2	La forma de las soluciones .....	188
6.2.1	Características generales en recinto completo y positivo.....	188
6.2.2	Ritmo de repetición.....	189
6.2.3	Número de nudos. ....	192
6.2.4	Concentración o reparto de tensiones. ....	193
6.2.5	Superficies.....	194
6.2.6	Luces salvadas.....	196
6.2.7	Esbelteces y cantos.....	198
6.3	Limitaciones impuestas a la búsqueda.....	199
6.3.1	Longitudes máximas de barras.....	199
6.3.2	Nueva búsqueda para base circular, recinto completo .....	201
6.3.3	Nueva búsqueda para base circular, recinto positivo .....	203
6.4	Relaciones entre los resultados obtenidos .....	205
6.4.1	Relaciones entre los valores desglosados de volumen estructural.....	205
6.4.2	Base circular.....	206
6.4.3	Base cuadrada.....	209
6.4.4	Base Mixta .....	210
6.4.5	Base rectangular 2/1 .....	212
6.4.6	Base rectangular 3/1 .....	213
6.5	Otros parámetros de forma .....	214
6.6	Resumen .....	216
<b>Capítulo 7</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>219</b>
7.1	Comportamiento del Recocido Simulado.....	221
7.2	Volumen estructural como función objetivo .....	222
7.3	Aplicaciones .....	223
7.4	Nuevas vías de investigación y futuros avances.....	223

<b>Anejo A</b>	<b>Símbolos más frecuentes .....</b>	<b>225</b>
A.1	Símbolos romanos. ....	225
A.2	Símbolos griegos. ....	227
<b>Anejo B</b>	<b>Contenido del CD .....</b>	<b>229</b>
B.1	Organización en directorios.....	229
B.2	MS-DOS .....	229
B.3	LINUX.....	230
B.4	SOLUCIONES .....	230
<b>Anejo C</b>	<b>Manuales de referencia .....</b>	<b>233</b>
C.1	Optimizador de láminas.....	233
C.2	Valores por defecto.....	242
	<b>Referencias bibliográficas.....</b>	<b>243</b>
	<b>Fe de erratas .....</b>	<b>257</b>

## Índice de figuras

figura 2. 1: Estructuras del mundo natural adaptadas a su entorno (Gordón, 1978). .....	9
figura 2. 2: Secoya gigante de 92 metros de altura (izquierda), pino de Douglas (centro), pino ponderosa (derecha); ilustran el aumento de diámetro basal del tronco del árbol al crecer en altura. (McMahon et Bonner 1986).....	10
figura 2. 3: Torre biónica (Cervera y Pioz, <a href="http://www.bionictower-bvs.com/">http://www.bionictower-bvs.com/</a> ) .....	11
figura 2. 4: Vista en perspectiva del proyecto para la nueva estación de Florencia del arquitecto A. Isozaki.....	11
figura 2. 5: Estructuras en la naturaleza, esqueleto de un caballo (Gordón, 1978). .....	12
figura 2. 6: Tela de araña (Wester, 1997) .....	13
figura 2. 7: Estudio de la geometría de las pompas (Otto, 1967) .....	16
figura 2. 8: Centro de exhibición de horticultura en Holanda, 1959/60 (Otto, 1967) .....	16
figura 2. 9: El instituto de Estructuras Ligeras en Stuttgart: el modelo de Otto (izquierda), la malla del edificio real (derecha) (Hildebrandt, 1990).....	17
figura 2. 10: Erizo de mar y su división en placas. (Wester, 1997).....	18
figura 2. 11: Imagen microscópica de la unión entre placas (izquierda), dirección de crecimiento comparada con la dirección de fuerzas estabilizantes de la placa (derecha).....	18
figura 2. 12: Ejemplos de Radiolario (Wester, 1997).....	19
figura 2. 13: Colonias de cocolitos (Wester 1997). .....	19

figura 2. 14: Estructura interna de un fémur (Wester, 1997).....	20
figura 2. 15: Hueso metacarpiano del ala de un buitre similar a una cercha tipo warren. (Thompson, 1961).....	21
figura 2. 16: Telas colgadas.Experimento de Heinz Isler (Ramm, 1989: 85).....	23
figura 2. 17: Modelos invertidos plásticos. Maqueta de Oscar Andrés, modelos n. 4, (Andrés, 1994).....	24
figura 2. 18: Modelos neumáticos. Cáscara de Isler de 54m x 58m para nave y almacén, búsqueda y medición de la forma, (fig. Ramm, 1989: 50, 51).....	24
figura 2. 19: Palacio de los deportes de Frei Otto en Munich. La forma inicial la obtiene con un modelo pretensado, finalmente realizada con una malla en dos direcciones de igual dimensionado de cables de acero. ....	25
figura 2. 20: Telas pretensadas. Cabaña de hielo de 6m de alto y 2 cm de espesor de hielo, (Ramm, 1989: 89).....	26
figura 2. 21: Lamina final (Orta & Rodríguez de Rivas, 1999).....	28
figura 2. 22: Ejemplo de aplicación del método (Bletzinger, 1998).....	29
figura 2. 23: Modelos colgados, simulación numérica (Ramm, 2000).....	29
figura 2. 24: Flujo del programa y solución a un problema de optimación.(Ansola <i>et alli</i> , 2002a).....	30
figura 2. 25: Optimación de topología de una lámina esférica, (Bletzinger <i>et alli</i> , 1996).....	31
figura 2. 26: Forma inicial y final (Ohmori & Yamamoto, 1998). ....	32
figura 3. 1: Mínimos de Pareto .....	35
figura 3. 2: Problema convexo en una función y un dominio.....	36
figura 3. 3: Problema lineal .....	36
figura 3. 4: Representación gráfica de la función $f(x)=\cos(14.5x-0.3)+(x+0.2)x$ ejemplo resuelto en <a href="http://www.taygeta.com/annealing/demo1.html">http://www.taygeta.com/annealing/demo1.html</a> con el recocido simulado. ....	37
figura 3. 5: Problemas de optimación (Hernández. 1990).....	38
figura 3. 6: Programación en pseudo pascal del recocido simulado (Aarts, 1990).....	50

figura 3. 7: Parámetros para el recocido. ....	53
figura 3. 8: Evolución del recocido simulado.....	55
figura 4. 1: Una única carga aplicada en el extremo A de la línea AB, y las reacciones correspondientes a un empotramiento, fuerza y momento, en B.....	65
figura 4. 2: Estructura biapoyada en A y B, con una única carga puntual entrada, aplicada en C, en la figura de la derecha la solución está restringida al espacio a solo un lado de la línea AB. ....	66
figura 4. 3: El entramado mínimo de tres fuerzas, concurrentes en un punto y dos de las cuales son de igual magnitud.....	66
figura 4. 4: Dos momentos iguales de sentido contrario aplicados en los extremos de la recta AB. ....	66
figura 4. 5: Trazado óptimo (Cervera, 2004: 128).....	67
figura 4. 6: Transformación afín.....	67
figura 5. 1: Topología: elemento, $e$ , definido por $(n_i, n_j)$ y el superelemento, $s$ , por $(n_i, n_{i1}, n_{i2} \dots, n_{ij})$ .....	70
figura 5. 2: Condiciones de apoyo: condiciones mínimas de sustentación para una lámina de 4 nudos.....	71
figura 5. 3: Plano para nudos de contorno .....	75
figura 5. 4: Jugadas del generador de alternativas.....	78
figura 5. 5: Solución inicial de 26 nodos, base circular $V_s=2.599 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	86
figura 5. 6: Solución para $L_{\max}=80\%$ , recinto completo, $V_s=0.754 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	89
figura 5. 7: Solución para $L_{\max}=80\%$ , recinto positivo, $V_s=1.373 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	91
figura 5. 8: Solución para $L_{\max}=40\%$ , recinto completo, $V_s=1.822 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	93
figura 5. 9: Solución para $L_{\max}=40\%$ , recinto positivo, $V_s=2.056 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	96
figura 5. 10: Solución inicial de 101 nodos, base circular, $V_s=3.010 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	98
figura 5. 11: Solución para $L_{\max}=30\%$ , recinto completo, $V_s = 1.931 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	101
figura 5. 12: Solución para $L_{\max}=30\%$ , recinto positivo, $V_s = 2.155 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	103
figura 5. 13: Solución para $L_{\max}=20\%$ , recinto positivo, $V_s=2.268 \text{ e}06\text{kN.m.}$ .....	105

figura 5. 14: Comparativa de alzados en recinto completo. Solución inicial, Lmax=30% y Lmax=20%.	107
figura 5. 15: Comparación a hundimiento de un sector de estructura.	107
figura 5. 16: Aeropuerto de Stansted en Londres, por Norman Foster.	108
figura 5. 17: Disposición de las reacciones horizontales.	108
figura 5. 18: Solución inicial de 25 nodos, base cuadrada, Vs=29.776 e06kN.m.	110
figura 5. 19: Solución para Lmax=80%, recinto completo, Vs=1.161 e06kN.m.	112
figura 5. 20: Solución para Lmax=80%, recinto positivo, Vs=1.346 e06kN.m.	114
figura 5. 21: Secciones.	116
figura 5. 22: Solución para Lmax=40%, recinto completo, Vs=3.002 e06kN.m.	117
figura 5. 23: Solución para Lmax=40% y apoyos horizontales, recinto completo, Vs=2.662 e06kN.m.	119
figura 5. 24: Solución para Lmax=40%, recinto positivo, Vs=3.649 e06kN.m.	121
figura 5. 25: Solución inicial de 86 nodos, base cuadrada, Vs=148.439 e06kN.m.	123
figura 5. 26: Solución para Lmax=30%, recinto completo, Vs= 2.349 e06 kN.m	125
figura 5. 27: Deformada: vista en planta	127
figura 5. 28: Solución para Lmax=30%, recinto positivo, Vs 2.934 e06 kN.m	128
figura 5. 29: Piscina cubierta en Brugg (Suiza), de Heiz Isler, (Ramm, 1989)	130
figura 5. 30: Solución inicial de 112 nodos, base cuadrada, Vs= 18.640 e06 kN.m	131
figura 5. 31: Solución para Lmax=30%, recinto positivo, Vs= 4.223 e06 kN.m	133
figura 5. 32: Solución Inicial de 39 nodos, base mixta Vs=1.902 e06kN.m.	137
figura 5. 33: Solución para Lmax=160%, recinto completo Vs=0.169 e06kN.m	139
figura 5. 34: Solución para Lmax=160%, recinto positivo Vs=0.273 e06kN.m	141
figura 5. 35: Solución para Lmax=80%, recinto completo Vs=0.453 e06kN.m	142
figura 5. 36: Secciones de la solución para recinto completo.	144
figura 5. 37: Secciones y deformada de la estructura en planta.	145
figura 5. 38: Solución para Lmax=80%, recinto positivo Vs=0.544 e06kN.m	147
figura 5. 39: Solución Inicial de 54 nodos, base mixta Vs=1.994 e06kN.m.	148
figura 5. 40: Solución para Lmax=80%, recinto completo Vs= 0.979 e06 kN.m	150
figura 5. 41: Solución para Lmax=80%, recinto positivo Vs= 0.658 e06 kN.m	152
figura 5. 42: Solución para Lmax=40%, recinto completo Vs= 0.850 e06 kN.m	154



figura 5. 43: Secciones de la solución (izquierda) y deformada (derecha).....	155
figura 5. 44: Solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo. $V_s= 0.928 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	157
figura 5. 45: Solución inicial, base rectangular, $V_s= 15.572 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	159
figura 5. 46: Secciones de la solución para recinto completo.....	162
figura 5. 47: Solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo $V_s=0.407 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	163
figura 5. 48: Secciones.....	164
figura 5. 49: Solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo $V_s=0.620 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	165
figura 5. 50: Secciones.....	167
figura 5. 51: Solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo $V_s= 0.884 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	168
figura 5. 52: Deformada.....	169
figura 5. 53: Solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo $V_s = 1.188 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	170
figura 5. 54: Solución inicial, base rectangular proporción 3/1, $V_s= 43.534 \text{ e}06$ kN.m.....	173
figura 5. 55: Deformada.....	174
figura 5. 56: Secciones.....	175
figura 5. 57: Solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo, $V_s=0.689 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ . .....	176
figura 5. 58: Secciones y Deformada.....	177
figura 5. 59: Solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo, $V_s=0. 995 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ . .....	178
figura 5. 60: Solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo, $V_s= 1.493 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	179
figura 5. 61: Geometría en planta y sección (izquierda). Deformada en planta y alzado (derecha) .....	180
figura 5. 62: Geometría en planta y sección (izquierda). Deformada en planta y alzado (derecha) .....	181
figura 5. 63: Solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo $V_s=1.868 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	183
 figura 6. 1: Solución inicial, $V_s=29.776 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	185
figura 6. 2: Solución a los 50 ciclos, $V_s=17.509 \text{ kN/m}$ .....	186
figura 6. 3: Solución a los 100 ciclos, $V_s=4.619 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	187
figura 6. 4: Solución final, $V_s=3.649 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .....	187

figura 6. 5: Comparativa de los alzados de los diseños de recinto completo para Lmax=40% con base cuadrada (izquierda), base rectangular 2/1 (centro) y base rectangular 3/1 (derecha).....	189
figura 6. 6: Dos maneras de llevar la carga a los apoyos, en una o dos direcciones.....	191
figura 6. 7: Dimensiones.....	191
figura 6. 8: Comparativa diseño de base cuadrada con los apoyos en las esquinas. Distribución de tensiones continua (izquierda) o concentración de tensiones (derecha) .....	193
figura 6. 9: Ejemplos de las multiples plegaduras de la superficie de la lámina, base circular (izquierda) y base cuadrada (derecha) .....	195
figura 6. 10: Ejemplos de luces salvadas con base circular y cuadrada.....	196
figura 6. 11: Ejemplo de luces salvadas con base rectangular.....	197
figura 6. 12: Ejemplos de disminución del desarrollo del anillo a tracción .....	198
figura 6. 13: Ejemplos de luces salvadas en recinto positivo con base rectangular. ....	198
figura 6. 14: Solución para Lmax=30% en proyección horizontal, recinto completo, Vs= 1.752 e06kN.m. ....	202
figura 6. 15: Solución para Lmax=30% en proyección horizontal, recinto positivo, Vs= 2.021 e06kN.m.....	204
figura 6. 16: Parámetro de forma de la carga.....	215

## Índice de tablas

tabla 5. 1: Modelo de desglose del volumen estructural.....	84
tabla 5. 2: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 26 nodos, base circular.....	87
tabla 5. 3: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo.....	88
tabla 5. 4: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.....	90
tabla 5. 5: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo.....	92
tabla 5. 6: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=40\%$ , recinto completo.....	94
tabla 5. 7: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo.....	95
tabla 5. 8: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo.....	95
tabla 5. 9: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 101 nodos, base circular.....	97
tabla 5. 10: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=30\%$ , recinto completo.....	99
tabla 5. 11: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=30\%$ , recinto completo.....	100

tabla 5. 12: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=30\%$ , recinto positivo. ....	102
tabla 5. 13: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=20\%$ , recinto positivo. ....	104
tabla 5. 14: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=20\%$ , recinto positivo. ....	104
tabla 5. 15: Resumen de resultados. ....	106
tabla 5. 16: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos. ....	106
tabla 5. 17: Volumen estructural desglosado, solución inicial, base cuadrada. ....	109
tabla 5. 18: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo. ....	111
tabla 5. 19: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=80\%$ , recinto completo. ....	113
tabla 5. 20: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo. ....	115
tabla 5. 21: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo. ....	116
tabla 5. 22: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=40\%$ , recinto completo. ....	118
tabla 5. 23: Volumen estructural desglosado, solución alternativa para $L_{max}=40\%$ , recinto completo ....	120
tabla 5. 24: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo ....	120
tabla 5. 25: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo ....	122
tabla 5. 26: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 85 nudos, base cuadrada. ....	124
tabla 5. 27: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=30\%$ , recinto completo ....	126
tabla 5. 28: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=30\%$ , recinto positivo ....	127

tabla 5. 29: Resumen de resultados. ....	129
tabla 5. 30: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos. ....	129
tabla 5. 31: Volumen estructural desglosado, solución inicial. ....	132
tabla 5. 32: Volumen estructural desglosado, solución inicial incluyendo tirantes. ....	132
tabla 5. 33: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=30\%$ , recinto positivo. ....	134
tabla 5. 34: Volumen estructural desglosado incluidos los tirantes. ....	135
tabla 5. 35: Resumen y comparación de resultados. ....	135
tabla 5. 36: Volumen estructural desglosado, solución inicial, 39 nudos, base mixta. ....	136
tabla 5. 37: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=160\%$ , recinto completo. ....	140
tabla 5. 38: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=160\%$ , recinto positivo. ....	140
tabla 5. 39: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo. ....	144
tabla 5. 40: Volumen estructural desglosado, solución afín para $L_{max}=80\%$ , recinto completo. ....	145
tabla 5. 41: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo. ....	146
tabla 5. 42: Volumen estructural desglosado, solución inicial, 54 nudos, base mixta. ....	149
tabla 5. 43: Volumen estructural, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo. ....	151
tabla 5. 44: Volumen estructural, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo. ....	153
tabla 5. 45: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo. ....	155
tabla 5. 46: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo. ....	156
tabla 5. 47: Resumen de resultados. ....	158
tabla 5. 48: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos. ....	158

tabla 5. 49: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 46 nodos, base rectangular.....	160
tabla 5. 50: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo.....	161
tabla 5. 51: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.....	166
tabla 5. 52: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo.....	167
tabla 5. 53: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo.....	171
tabla 5. 54: Resumen de resultados. ....	171
tabla 5. 55: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos. ....	171
tabla 5. 56: Volumen estructural desglosado, solución inicial, 67 nudos, base rectangular 3/1.....	172
tabla 5. 57: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto completo.....	174
tabla 5. 58: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.....	177
tabla 5. 59: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto completo.....	181
tabla 5. 60: Volumen estructural desglosado, solución para $L_{max}=40\%$ , recinto positivo.....	182
tabla 5. 61: Resumen de resultados. ....	184
tabla 5. 62: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos. ....	184
tabla 6. 1. Comparativa de valores. ....	190
tabla 6. 2: Volumen estructural desglosado.....	201
tabla 6. 3: Volumen estructural desglosado.....	205
tabla 6. 4: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base circular.....	207
tabla 6. 5: Relación de volumen estructural para $l_{max}$ en proyección horizontal. ....	207

tabla 6. 6: Relación de esbeteces en recinto completo y positivo. Base circular.....	208
tabla 6. 7: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo para <i>lmax</i> en proyección horizontal.....	209
tabla 6. 8: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base cuadrada.....	210
tabla 6. 9: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base cuadrada.....	210
tabla 6. 10: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base mixta.....	211
tabla 6. 11: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base mixta.....	212
tabla 6. 12: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base rectangular 2/1.....	212
tabla 6. 13: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base rectangular 2/1.....	213
tabla 6. 14: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base rectangular 3/1.....	213
tabla 6. 15: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base rectangular 3/1.....	214

# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis se enmarca dentro del ámbito de la teoría del diseño de estructuras. Esta teoría surge con la intención de ofrecer un cierto grado de formalización en los aspectos del diseño que tienen incidencia en el comportamiento estructural, tratando de presentar algunas herramientas geométricas. Así, intenta racionalizar el proceso de diseño estableciendo, mediante el análisis de soluciones genéricas, reglas que permiten llegar en el menor tiempo y al menor coste posibles a soluciones razonables. La evaluación de los diseños óptimos contribuye en gran medida a este propósito. Ésta es la línea que un grupo de profesores e investigadores del Departamento de Estructuras de Edificación de la ETSAM, lleva largo tiempo estudiando, camino iniciado por Ricardo Aroca, director de diversas tesis doctorales en esta línea de investigación. Recientemente se ha avanzado en la búsqueda de óptimos en cúpulas (Cervera, 1990) mediante el análisis de sensibilidad, y se ha mostrado un procedimiento aplicable a problemas de la teoría de estructuras, el recocido simulado (Vázquez, 1994), mediante su aplicación a problemas de búsqueda de óptimos. Finalmente en *Concebir y analizar estructuras* (Cervera, 2004), tras realizar un recorrido por los métodos de análisis de estructuras de edificación, se exponen los conceptos básicos de la teoría del Proyecto de estructuras.



### 1.1 Estructuras tipo lámina

Una estructura tipo lámina es aquella que salva grandes luces con pequeños espesores, esto es posible gracias, fundamentalmente, a su forma. La doble curvatura le permite soportar diferentes estados de carga únicamente mediante el estado de membrana (tracciones y compresiones). Si esto no fuera posible habría que recurrir a la flexión. Debido a su pequeño espesor se intentan evitar los momentos o la excentricidad de los axiles. Este tipo estructural suele destinarse a cubrir grandes espacios sin apoyos intermedios.

Como su comportamiento mecánico está directamente relacionado con su forma, ésta se convierte en uno de los factores más importantes en su diseño, y por ello es importante encontrar la más adecuada, adaptándola de manera que se reduzcan los esfuerzos internos de flexión y así que tenga un comportamiento real como membrana. Sin embargo no existe, todavía, una reflexión sobre los parámetros que más incidencia tienen en el coste de una manera comparable a la existente en las estructuras planas, y que son de gran utilidad en la formalización teórica. En la tesis se pretenden caracterizar estos parámetros en base a la exploración de posibles soluciones a problemas concretos obtenidas por medio del recocido simulado.

Por otra parte una alta compresión en la membrana puede causar el fallo por pandeo lo que la convierte también en una estructura bastante sensible a imperfecciones constructivas. Esta segunda cuestión es más compleja, recientemente ha sido estudiado por Ramm (1993), resolviéndolo mediante pequeñas variaciones de la forma con el fin de encontrar la peor distribución de desviaciones de la forma inicial.

### 1.2 Breve descripción de los contenidos

La tesis comienza con este capítulo introductorio en el que se describen, de forma genérica, el propósito que se pretende alcanzar y, brevemente, las distintas partes del texto; de esta manera resulta más claro comprender las relaciones entre los siguientes capítulos.

En el *segundo capítulo* se trata de revisar diversos métodos de obtención o determinación de formas estructurales que han servido de fuente de soluciones en el pasado. Por una parte con las ‘inspiraciones’ basadas en modelos de estructuras que

se encuentran en la naturaleza, se ilustrará su comportamiento mecánico, y la adaptación de su forma a las situaciones de carga que debe resistir, o como se adaptan en su crecimiento. Otras ‘inspiraciones’ se basan en analogías físicas, se expondrán ciertos métodos de búsqueda de formas en estructuras tipo lámina, bien mediante modelos físicos o matemáticos.

El problema de la optimación, desde el punto de vista matemático, se describe en el *capítulo tercero*, profundizando ligeramente en el estudio de la optimación de estructuras. Se pasa revista a diversos métodos de optimación, enmarcándolos dentro de una clasificación. Posteriormente se pasa a exponer algunos de los algoritmos que se están usando en diferentes áreas de investigación y aplicados en una gran variedad de problemas. Se verá con mayor profundidad dos métodos empleados con frecuencia en estos últimos años, el algoritmo genético y el recocido simulado. Se verá como ambos son técnicas de búsqueda estocástica basados en procesos encontrados en la naturaleza, la evolución natural y la termodinámica. Surgen para dar respuesta al problema de la optimación de una función, en especial los de muy elevada irregularidad. Se prestará una atención especial al elegido para esta tesis, el recocido simulado. Se observará su comportamiento frente a los problemas aquí resueltos.

A continuación se muestran los conceptos básicos de la teoría de diseño de estructuras, *capítulo cuarto*. Se verá cómo encaja el problema de la optimación de estructuras dentro de esta teoría y se establece la medida del consumo de la estructura. Estos conceptos se aplicarán en los siguientes capítulos a los resultados obtenidos.

En el *capítulo quinto* se expone la aplicación del algoritmo elegido a la búsqueda de formas óptimas en láminas. Se muestran la formulación del problema, nuevo en el ámbito de aplicación del recocido, las condiciones de partida, el dominio de búsqueda, y los mecanismos de generación de alternativas. Se exponen las bases de funcionamiento del programa creado con objeto de esta tesis, para finalmente aplicarlo a una serie de ejemplos. Se muestra con detalle las soluciones halladas.

Posteriormente, ya en el *capítulo sexto*, se analizan las soluciones encontradas, apuntando a los parámetros geométricos del diseño de láminas que se buscaba en el objeto de esta tesis, extrayendo unas conclusiones parciales y posibles aspectos de la evolución del problema.

Finalmente en el *capítulo séptimo* se extraen conclusiones genéricas de la tesis, mostrando posibles aplicaciones y abriendo posibles vías de investigación.

Para facilitar el uso del programas elaborados e incluido en el CD adjunto, se presenta un anejo la guía de aplicación, explicando el tipo de archivos de entrada y salida que utilizan, por medio, de nuevo, de los ejemplos anteriormente estudiados.

Al final se incluye la bibliografía de referencia empleada en la elaboración de este texto.

### 1.3 Nomenclatura

Se ha heredado la forma de expresión de Vázquez (1994:1) y de Cervera (1993:33). El primero de ellos destaca el origen de la palabra ‘optimizar’ como un barbarismo no presente en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (RAE) hasta tiempos recientes, mientras ‘optimar’ si existía. En la edición actual, 22ª, aparece ‘optimar’ como sinónimo de ‘optimizar’ con el siguiente significado: ‘buscar la menor manera de realizar una actividad’. En cuanto a los vocablos ‘minimizar’ o ‘minimar’ también se ha empleado este segundo que no aparece en la actual edición del citado diccionario; Cervera argumenta lo poco adecuado que parece el significado de ‘minimizar’ como ‘disminuir el valor de una cosa o frivolarla’ refiriéndose a ‘minimar’ una función. De nuevo esto ha cambiado en la 22ª edición del diccionario de la RAE apareciendo, en su acepción matemática, como ‘buscar el mínimo de una función’, al igual que ‘maximizar’ aparece como ‘buscar el máximo de una función’. En esta tesis se han empleado ‘optimar’ en el sentido de búsqueda del óptimo y ‘minimar’ en el sentido de minimizar, es decir se han preferido vocablos más castellanos a traducciones literales del inglés.

Por otra parte, como se verá por el tipo de problemas a los que se enfrenta esta tesis, es difícil saber cual es la solución mejor para cierto problema, el *óptimo*. Por ello se ha procurado referirse a las soluciones alcanzadas en esta tesis como ‘buenas’, no en

un sentido ético sino en el de ‘que tiene buena calidad respecto a sus iguales’, o en ocasiones se han comparado refiriéndose que unas son ‘mejores’ que otras desde el punto de vista de la función considerada.

#### **1.4 Agradecimientos**

Esta tesis ha sido dirigida por Jaime Cervera y Mariano Vázquez quienes me han ayudado en múltiples facetas, facilitándome mucho material de trabajo necesario para el desarrollo de esta investigación (prestándome bibliografía o posibilitando el acceso a ciertos ordenadores), así como en sus valiosas opiniones.

Quiero agradecer al Departamento de Estructuras de Edificación el permitirme utilizar sus equipos informáticos, tan necesarios para la obtención de los resultados. Gran parte de la dedicación en el desarrollo de esta tesis ha sido en tiempo de programación, labor en la cual he tenido el apoyo de Susana Díaz durante todos los años en que he estado trabajando con el C, lenguaje de programación que conocí gracias a Ignacio Jaenicke durante su curso de doctorado. También me he estado "peleando" con el sistema operativo Linux, en esta labor conté con la inestimable colaboración de Luis Miguel Orta y así conseguí compilar y ejecutar el programa.

No me olvido de aquellos que me han librado de ciertos asuntos laborales en los últimos meses, gracias a lo cual pude estar dedicada a la redacción del texto que aquí se presenta. Finalmente, y muy especialmente, agradecer a mis padres su paciencia y apoyo, al igual que al resto de familia y amigos que me han acompañado a lo largo de todo el recorrido.

No quisiera haberme olvidado de mencionar a nadie y si esto ha sucedido no ha sido de manera intencionada.



## **Capítulo 2**

### **Imitación de la naturaleza**

El capítulo revisa los métodos empleados en la obtención o determinación de formas óptimas, o al menos ‘buenas’, que abarcan tanto las ‘inspiraciones’ basadas en la observación de modelos naturales, como las exploraciones de analogías físicas y otros métodos, más cercanos a la inspiración artística que a la sistemática científica, pero que, sin embargo, han servido de fuente de soluciones formales en el pasado.

Se comienza con el estudio de las estructuras presentes en los organismos vivos realizado por Gordon (1978) y Wester (1997) así como en la obra de Thompson (1961), mostrando cómo aparecen en nuestro entorno, su naturaleza viva y no viva. Se ilustrará su comportamiento estático y cinemático, se intentará aislar y describir algunas de esas observaciones en relación al pensamiento ‘habitual’ de las estructuras hechas por ingenieros, en relación a su comportamiento estructural básico, la topología, la redundancia y la estabilidad cinemática.

A continuación se exponen los diferentes métodos de búsqueda de formas en láminas, muchos de los cuales aprovechan procesos físicos presentes en la naturaleza. En el siguiente capítulo se verán cómo esta imitación de la naturaleza se aplica a la búsqueda mediante algoritmos matemáticos.

#### **2.1 Modelos de estructuras en la naturaleza**

Los organismos vivos, las plantas o los animales, que encontramos en la actualidad son el resultado de la evolución a lo largo de un dilatado período de tiempo.

En esta evolución los organismos se han ido adaptando en diferentes facetas, entre ellas, en su lucha por la supervivencia, los sistemas estructurales que los sostienen buscan adecuarse a las cargas que deben soportar, a la vez que a un coste metabólico menor. Así han evolucionado cambiando formas y tamaños.

Las estructuras orgánicas cumplen con las exigencias puramente estructurales, a la vez, ayudan al ser vivo que la posee en su supervivencia, y buscan tener un menor coste metabólico.

Se verán patrones de los sistemas naturales muy diversos. Con frecuencia comunican reconocimiento, advertencia, camuflaje u otros muchos mensajes posibles entre los organismos vivos. A veces esos patrones también están basados en cuestiones de funcionalidad y dibujan líneas del sistema nervioso, el sistema de transporte de fluidos o reflejan las partes densas, que normalmente coinciden con los elementos que soportan las cargas. La geometría y topología de esos patrones con frecuencia son la base de la concepción para los métodos con que se elige describir, caracterizar, clasificar y reconocer tantos organismos vivientes.

Una diferencia obvia entre las estructuras del ingeniero y las estructuras de la naturaleza es que, mientras las primeras normalmente resisten cargas externas siendo rígidas, las segundas con frecuencia evitan y escapan de la carga exterior con movimientos y grandes deformaciones, p. ej. las ramas y las hojas de las plantas o la hierba. También recurren a mecanismos móviles como las algas flotantes o la tela de araña.

Sin ánimo de hacer una exposición detallada de todos los casos que se pueden encontrar en el mundo natural, pues no es ese el objeto, sino más bien con el de mostrar unas referencias en los diferentes ámbitos, vegetal y animal, se exponen los siguientes ejemplos. Se comenzará con unas estructuras lineales, como el árbol o el esqueleto de un cuadrúpedo; se pasa por la tela de araña como estructura reticulada superficial, hasta mostrar estructuras naturales que trabajan por su superficie como las pompas de jabón, el huevo, el erizo de mar y su crecimiento, los radiolarios y cocolitos; se finaliza con un entramado tridimensional como es la estructura interior de un hueso.

### 2.1.1 El árbol

En el mundo vegetal el ejemplo más característico es el del árbol, su estructura se puede asimilar a la de una viga en voladizo. En su lucha por la supervivencia, intenta ser más alto, sobresalir sobre las copas de otros árboles para recoger mayor luz solar para la fotosíntesis.

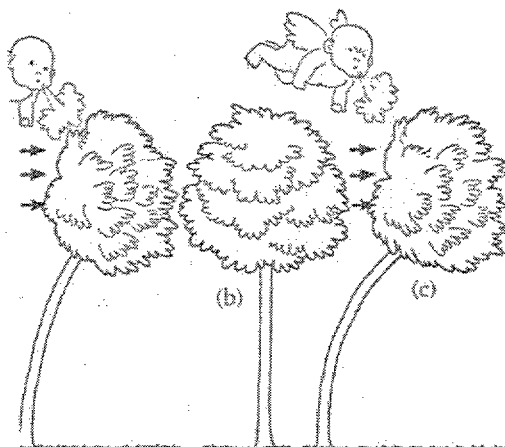


figura 2. 1: Estructuras del mundo natural adaptadas a su entorno (Gordón, 1978).

Su tronco tiene que soportar el peso de los distintos elementos que lo componen directamente a compresión, aunque las mayores y más importantes tensiones se producen debido a la presión del viento, trabajando como una viga en voladizo y provocando flexiones (figura 2. 1). Esta carga puede actuar en cualquier dirección, por ello los árboles deben tener una sección simétrica, normalmente circular cuando son de pequeño tamaño. Los elementos del árbol, desde las hojas, pasando por las ramas, hasta el tronco, escapan parcialmente de la fuerza del viento adoptando grandes deformaciones, sin romperse, gracias a la flexibilidad del material.

Los ejemplares más altos son las secoyas gigantes (*Sequoiadendron giganteum*), se elevan por encima de los 110 metros y alcanzan perímetros de hasta 30 metros. Las más antiguas se encuentran en California y superan los 4000 años. La acción del viento es más importante en ejemplares más altos, el diámetro debe aumentar según la potencia  $3/2$  de su altura (McMahon et Bonner, 1986). Esto explica las proporciones finas de los árboles jóvenes en comparación con el aspecto rechoncho y achaparrado de los grandes y viejos. (figura 2. 2)





figura 2. 2: Secoya gigante de 92 metros de altura (izquierda), pino de Douglas (centro), pino ponderosa (derecha); ilustran el aumento de diámetro basal del tronco del árbol al crecer en altura. (McMahon et Bonner 1986)

El proyecto de la torre biónica está inspirado en el modelo estructural de las especies vegetales(Rosa Cervera y Javier Pioz), y en la manera en que estas superan las fronteras de la altura (figura 2. 3)

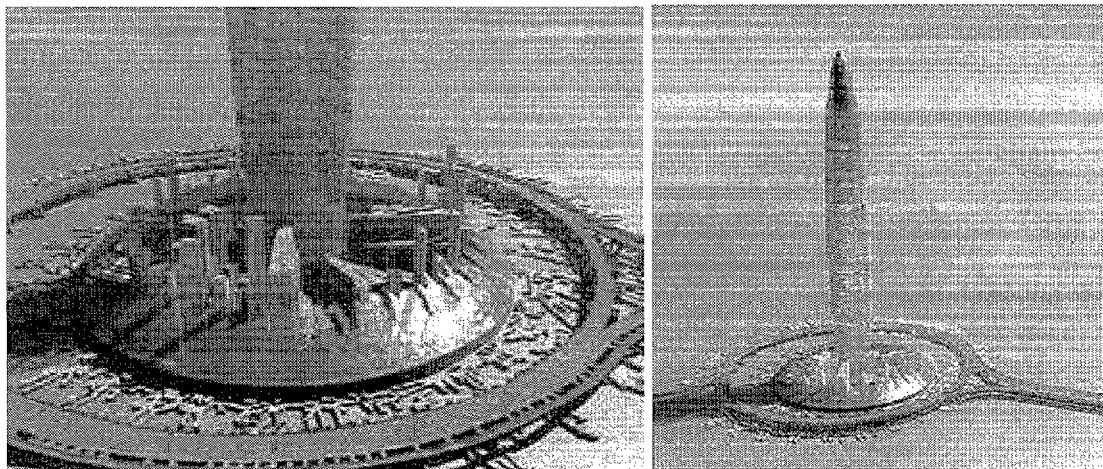


figura 2. 3: Torre biónica (Cervera y Pioz, <http://www.bionictower-bvs.com/>)

En la búsqueda de formas de estructuras 3D realizada por Cui (2003) llega a obtener formas cercanas a las del árbol (figura 2. 4)

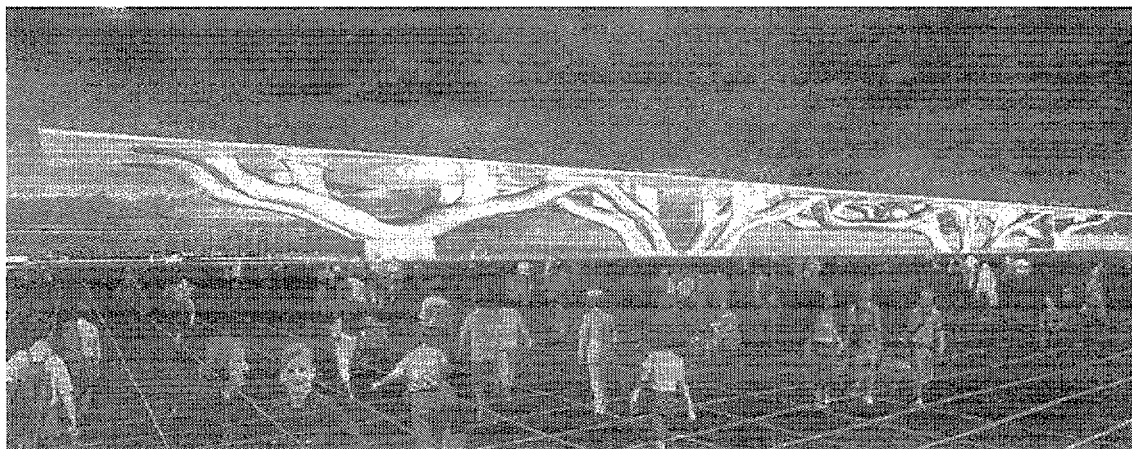


figura 2. 4: Vista en perspectiva del proyecto para la nueva estación de Florencia  
del arquitecto A. Isozaki

### 2.1.2 Esqueleto de caballo

Se puede encontrar una analogía a una viga biapoyada, con voladizos extremos, en un esqueleto de un cuadrúpedo, por ejemplo de un caballo (figura 2. 5), como sugiere Thompson (1961) La cabeza y la cola están en voladizo, en el tamo central la flexión que provoca el propio peso del animal se resiste mediante elementos trabajando a compresión, (la estructura ósea de vértebras y costillas), y elementos trabajando a tracción (el espacio íter costillar cosido por una malla de tejido muscular). En general el esqueleto soporta bien las compresiones, mientras que si es necesario que aparezcan tracciones, se recurre a los tendones y la musculatura.

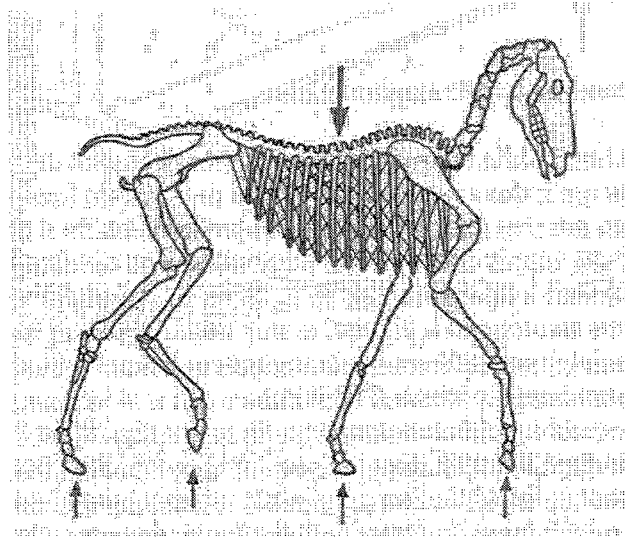


figura 2. 5: Estructuras en la naturaleza, esqueleto de un caballo (Gordón, 1978).

Como si de una celosía se tratase, pero en la naturaleza aparecen extrañas articulaciones pues pueden parecer ideales transmitiendo esfuerzos axiales, pero también pueden transmitir flexiones gracias al conjunto formado con los tendones. La rigidez a flexión comienza a actuar cuando el comportamiento básico solo con axiles falla. Así una estructura dañada temporalmente, puede seguir siendo estable hasta que la lesión desaparece. (Wester, 1997)

### 2.1.3 La tela de araña

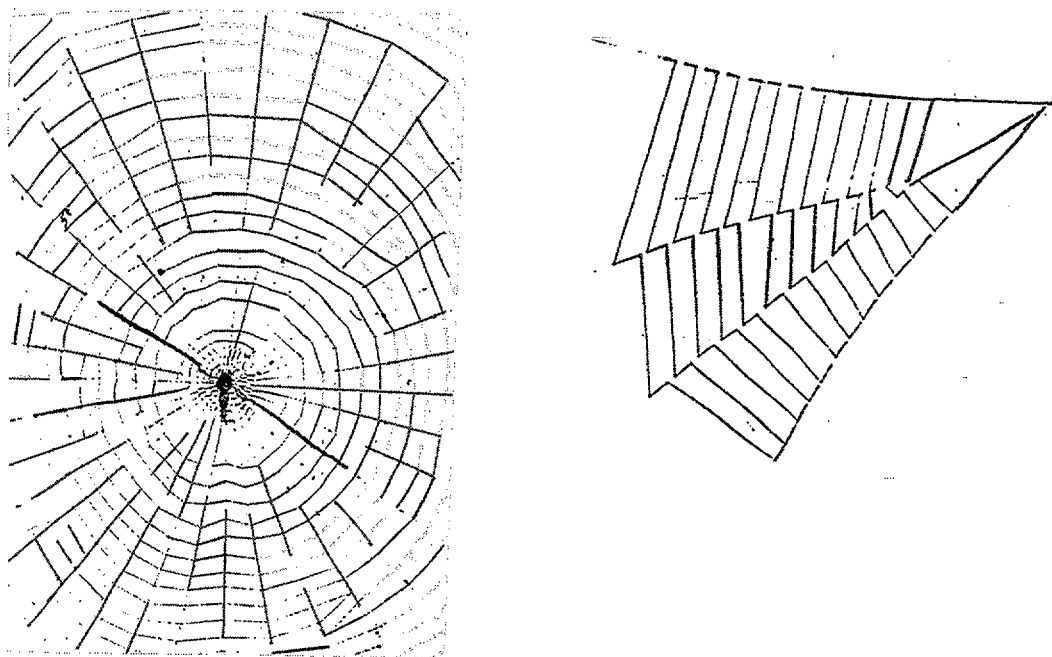


figura 2. 6: Tela de araña (Wester, 1997)

Una configuración estructural presente en la naturaleza, clásica y particularmente interesante es la tela de araña (figura 2. 6). Diferentes tipos de arañas tejen diferentes telas. Todas ellas están ajustadas a una especial manera de atrapar a la presa, y todos los diferentes tipos parecen tener relación a un mismo comportamiento estructural. La tela de araña se acerca a una estructura en celosía plana pura, como si hubiera sido ideada por un ingeniero, con barras rectas pretensadas y nudos articulados.

En la mayor parte de los nudos concurren cuatro elementos, salvo los nudos de contorno en los que concurren tres y el nudo central en el que concurren tantos hilos como radios. Si se añade el mínimo de hilos de unión con el exterior, tres más uno que da el efecto de pretensado, se obtiene que el conjunto solo tiene un hilo redundante (Wester, 1997, aporta una exposición más exhaustiva). Por cada hilo de soporte con el exterior la redundancia aumenta en uno, esto significa que una tela con más de cuatro hilos de soporte es potencialmente estable, en su propio plano vertical, el plano en que la gravedad de la araña actúa.

Si la red se somete a una carga puntual perpendicular al plano de la misma, la tela se deformará de la mejor manera posible, soportando esta carga. La elasticidad de los hilos absorberá la energía potencial y cinética. Esta característica estructural refleja exactamente la ventaja que necesita la araña para arrastrarse rápidamente sobre una estructura verticalmente estable y con la misma tela coge a su presa.

En este ejemplo la **no redundancia en las estructuras** es ventajosa desde diversos puntos de vista y por ello esta situación se aprovecha en ciertos diseños de las estructuras presentes en la naturaleza. De esta manera la cantidad de material necesario es menor y el número de uniones es menor y más sencillo. Quizás lo más importante es que los esfuerzos internos por el efecto del crecimiento, entre otros, son menores cuanto menor redundancia tenga la estructura. Esto significa que el crecimiento de una estructura con baja redundancia no tiene los mismos requisitos durante el crecimiento que una que sea altamente redundante.

Pero también tienen sus desventajas, la más obvia es que una estructura redundante es más segura frente al colapso, y si se pierden ciertas partes de la estructura accidentalmente, se puede cubrir esta situación hasta que la lesión se elimina.

#### 2.1.4 La cáscara de huevo

El ser vivo más sencillo estaría formado por una sola célula. Además forman parte del cuerpo de las plantas y animales. En la frontera de la célula actúan tanto la tensión de membrana como la tensión superficial (Hildebrandt, 1990), pero si se sitúa aquí este ejemplo es por la primera.

La membrana de la célula debe tener, al menos, un mínimo de resistencia para guardar la materia viva que alberga en su interior. Tanto membranas como pieles deben poder resistir algunos esfuerzos de tracción, el material que la constituye debe poder alargarse considerablemente sin reventar o desgarrarse y, en casi todos los casos, deben ser capaces de recobrar sus dimensiones originales por sí mismas cuando desaparece la fuerza que las solicitaba. Pueden alargarse con seguridad y repetidamente con deformaciones unitarias muy variables. (Gordon, 1978)

Pasando al mundo animal se puede encontrar una evolución de la membrana celular en la cáscara de huevo y en su ejemplo más conocido, el huevo de gallina. Su fina cáscara puede soportar, gracias a su forma, tensiones de compresión que provoquen las cargas superficiales radiales de presión, esto sucede en su primera etapa, al estar en el interior del cuerpo de la madre, ésta forma está adaptada a este tipo de presión y a las sollicitaciones que provoca. La telilla interior tiene una función similar, pero esta vez en tracción, soportando la presión de los fluidos del interior. Sin embargo la cáscara no podrá soportar las cargas puntuales. Esto facilitará que, cuando el poyuelo quiera salir, pueda hacerlo fácilmente picoteando ligeramente el cascarón. Ambas estructuras trabajan por su forma, pues en ningún caso pueden resistir esfuerzos fuera de su superficie, flexiones, debido a sus pequeños espesores, y también gracias a ello el coste metabólico en su producción es menor.

### **2.1.5 Pompas de jabón y superficies de Plateau**

Otro ejemplo de comportamiento tipo membrana son las láminas formadas por películas jabonosas. Los matemáticos se han sentido atraídos desde antiguo por este tipo de superficies. Las láminas que aparecen en estos experimentos se encuentran en equilibrio estable, se denominan “láminas de mínima energía potencial” o superficies minimales en el sentido de caracterizarse por tener menor área que cualquier otra superficie cercana tendida sobre el mismo contorno (Hildebrandt, 1990). En ellas la tensión superficial se encuentra en un mínimo local .

Ajustar una superficie mínima al perfil de cualquier curva cerrada dada en el espacio es un problema formulado por Lagrange (1736-1813). Plateau realizó numerosos experimentos sobre películas líquidas publicando en 1873 gran parte de sus observaciones. Llama la atención el hecho de que una curva cerrada dada puede limitar más de una superficie minimal estable.

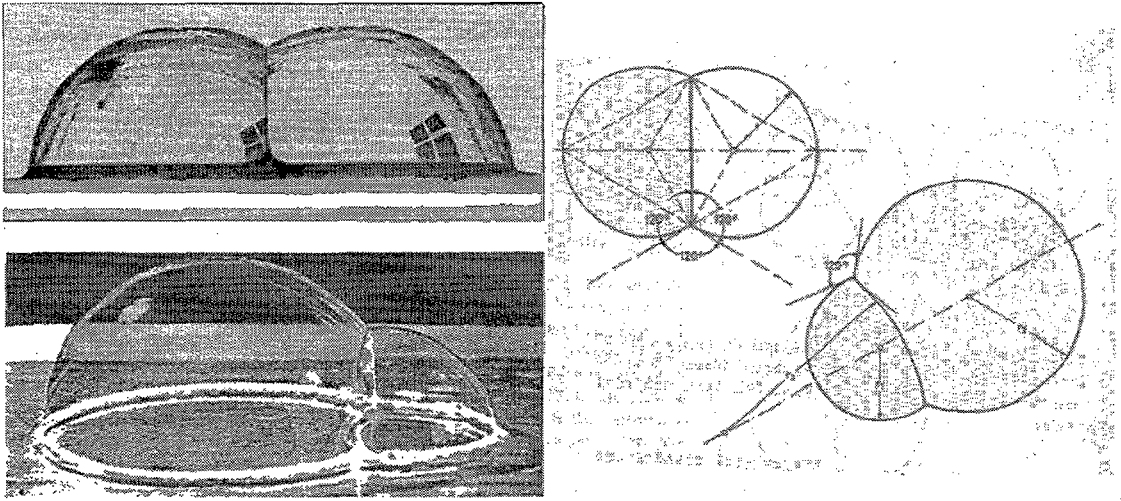


figura 2. 7: Estudio de la geometría de las pompas (Otto, 1967)

Frei Otto (1967) utiliza el estudio de las pompas de jabón para entender el comportamiento de las estructuras neumáticas, produciendo proyectos como el de la figura 2. 8, y en su búsqueda de formas que trabajen únicamente mediante el comportamiento de membrana, de donde surgen nuevas formas arquitectónicas (figura 2. 9).



figura 2. 8: Centro de exhibición de horticultura en Holanda, 1959/60 (Otto, 1967)

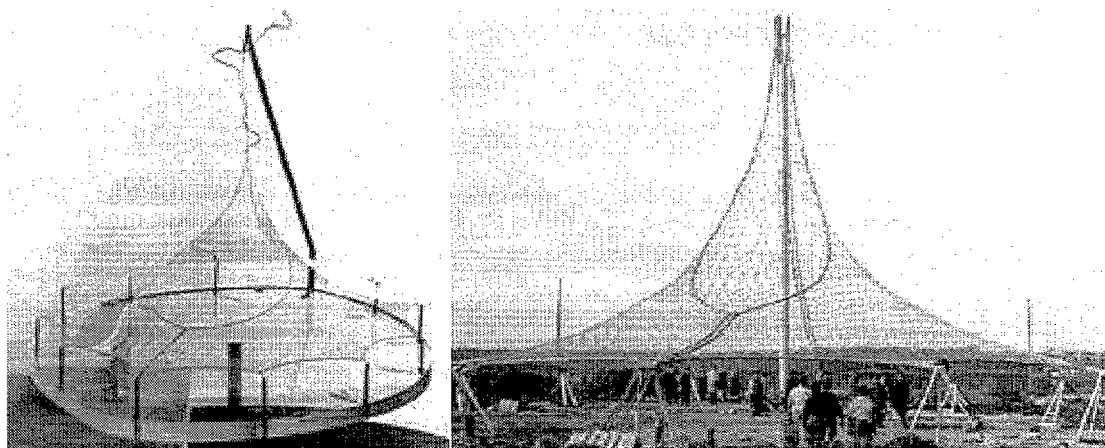


figura 2. 9: El instituto de Estructuras Ligeras en Stuttgart:  
el modelo de Otto (izquierda), la malla del edificio real (derecha) (Hildebrandt, 1990)

### 2.1.6 El erizo de mar

Los vértices trivalentes (en los que concurren tres elementos ya sean lineales o superficiales) son muy comunes en las estructuras superficiales de la naturaleza. Se encuentran ejemplos desde el cascarón de la tortuga o mucho más cercano se encuentra la estructura ósea del cráneo humano. Un particular e interesante ejemplo son las placas de la concha del erizo de mar.

El erizo de mar (figura 2. 10) es un claro ejemplo de estructura superficial tipo placa con una gran funcionalidad en el diseño de su forma, uniones, etc. Se añade a la posibilidad de resistir fuerzas exteriores, la de permitir el crecimiento. Esta clase de estructura expansible usualmente está más allá de las demandas de la edificaciones.

La conexión entre placas, adquieren distintas formas dentadas, esto previene los movimientos de corte entre placas. Las fibras de colágeno en las uniones actúan como cordones de zapatos, siendo importantes para mantener el conjunto unido, precomprimiendo las uniones pero no tan importante para mantener la estabilidad como pura placa. El comportamiento de las fibras de colágeno permite transmitir el cortante y la flexión. En el caso de inestabilidad de la placa causada por una rotura accidental de una o más placas, estas fibras tendrán que transmitir los esfuerzos durante el período de reparación. Hay otras teorías diferentes que incluyen un comportamiento como estructura de membrana o neumática.



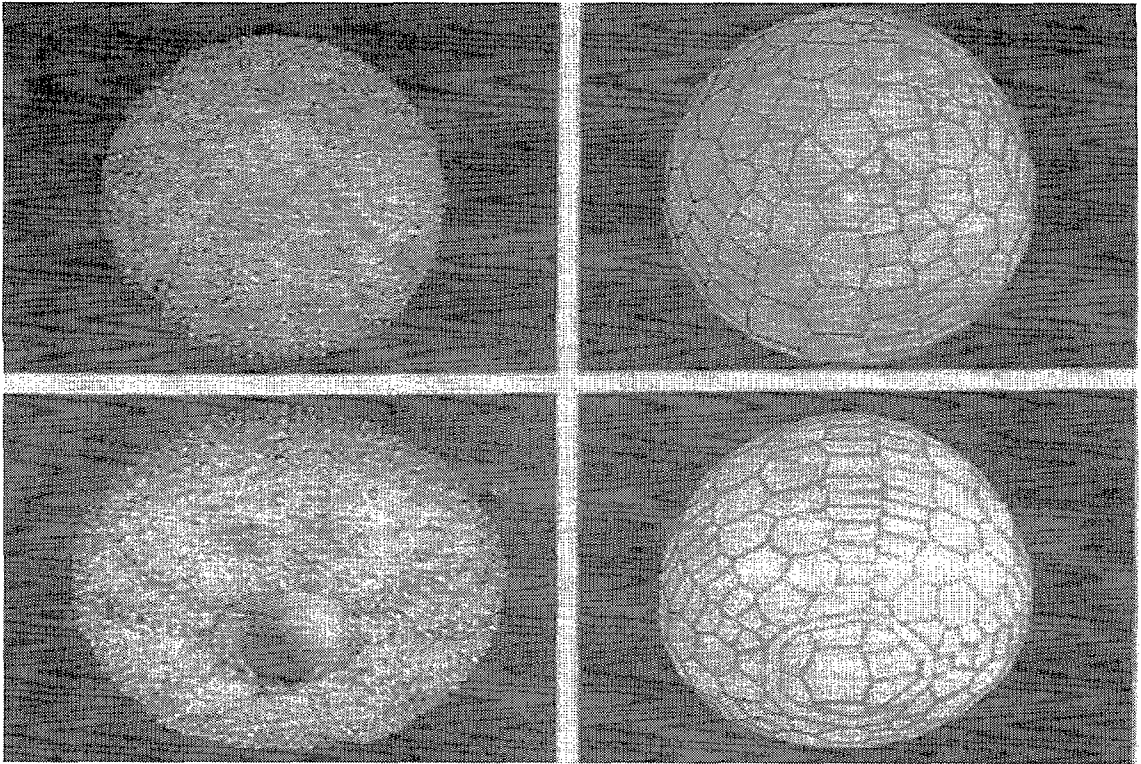


figura 2. 10: Erizo de mar y su división en placas. (Wester, 1997)

El erizo de mar crece incrementando el tamaño de sus placas individuales. (figura 2. 11) Así los bordes se mueven en dirección de la flecha. Esta dirección de crecimiento es perpendicular a las fuerzas de corte, estabilizando el conjunto. El crecimiento y la resistencia de las fuerzas se conjugan al mismo tiempo sin interferir.

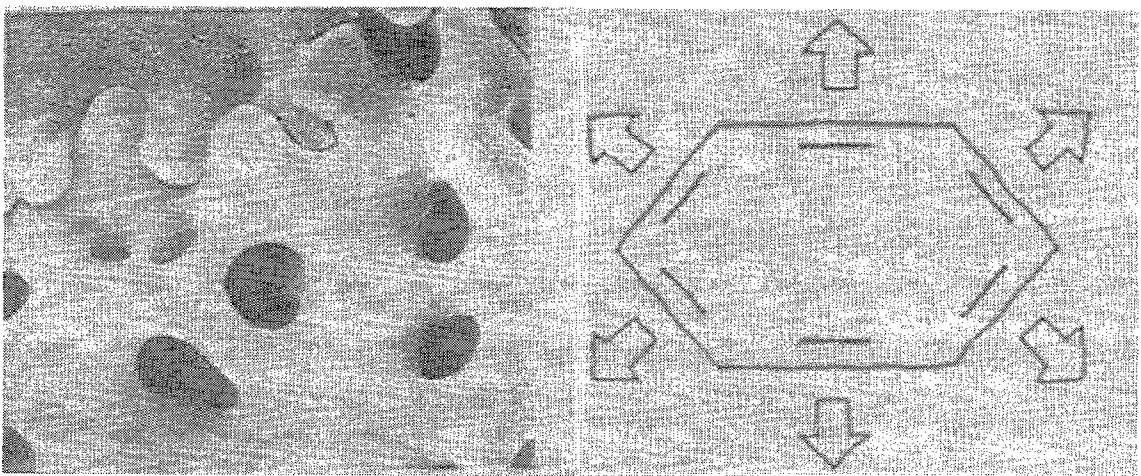


figura 2. 11: Imagen microscópica de la unión entre placas (izquierda),  
dirección de crecimiento comparada con la dirección de fuerzas estabilizantes de la placa (derecha)

2.1.7 Radiolarias y cocolitos

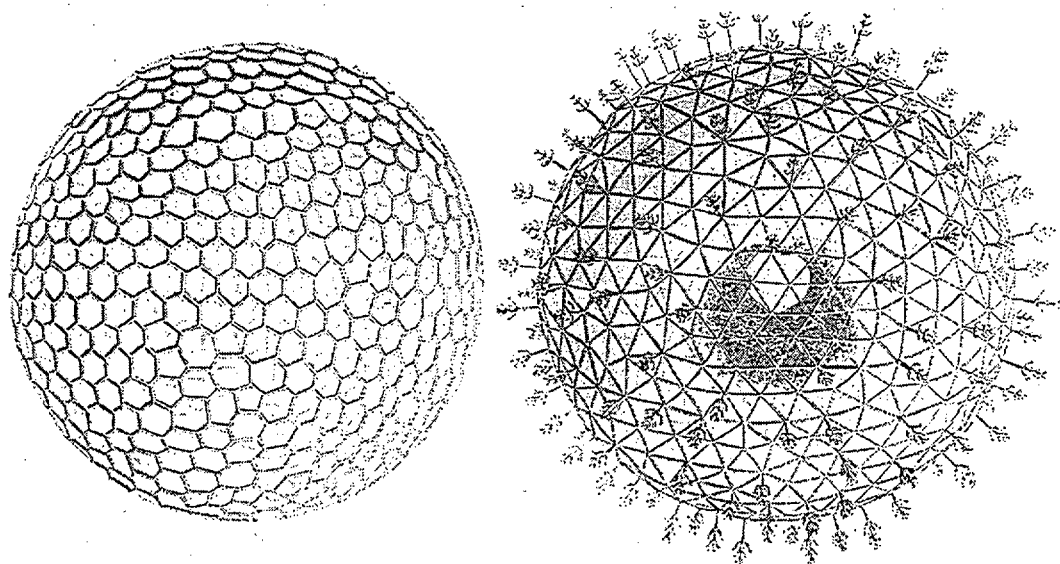


figura 2. 12: Ejemplos de Radiolario (Wester, 1997).

El plancton microscópico, flotando sobre los océanos, está sujeto a una carga uniforme en todas las direcciones. Por ello no desarrolla una orientación arriba-abajo como muchos organismos sujetos a la gravedad. En cambio con frecuencia desarrolla una geometría de poliedro o esfera no orientada. Un plancton silíceo es el denominado radiolaria con hermosas imágenes (como en la figura 2. 12). El esqueleto exterior, todavía no se ha estudiado con detalle, con frecuencia muestra configuraciones de celosía o de placas, o ambas.

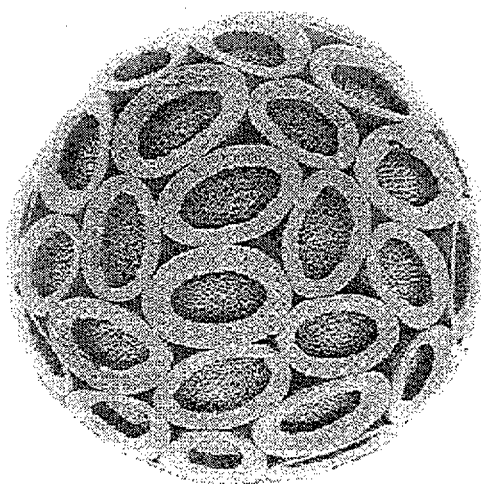


figura 2. 13: Colonias de cocolitos (Wester 1997).

Los cocolitos son otro plancton calizo, tiene el hábito de colaborar a estabilizarse formando colonias con formas poliédricas llamadas cocolitofóridos. Hay diversos tipos de conexiones entre los cocolitos (figura 2. 13).

### 2.1.8 La estructura ósea

Por último un ejemplo clásico de estructura reticulada en la naturaleza es la estructura cavernosa en las largas extremidades de los huesos tubulares (figura 2. 14). Esta configuración está orientada en la dirección de la tensión principal, es decir de las fuerzas de compresión y las trayectorias de las tensiones. Las cavernas están conectadas a la capa superficial y compacta del hueso, de esta forma el conjunto es ligeramente redundante. Observando el fémur de astronautas y otros individuos que han estado sometidos a una carga inusual, se observa una reorganización del patrón. La estructura busca utilizar un mínimo consumo de energía, lo que implica un máximo riesgo durante el proceso de reestructuración, ya que pueden aparecer unas tensiones internas indeseadas que provoquen el fallo.

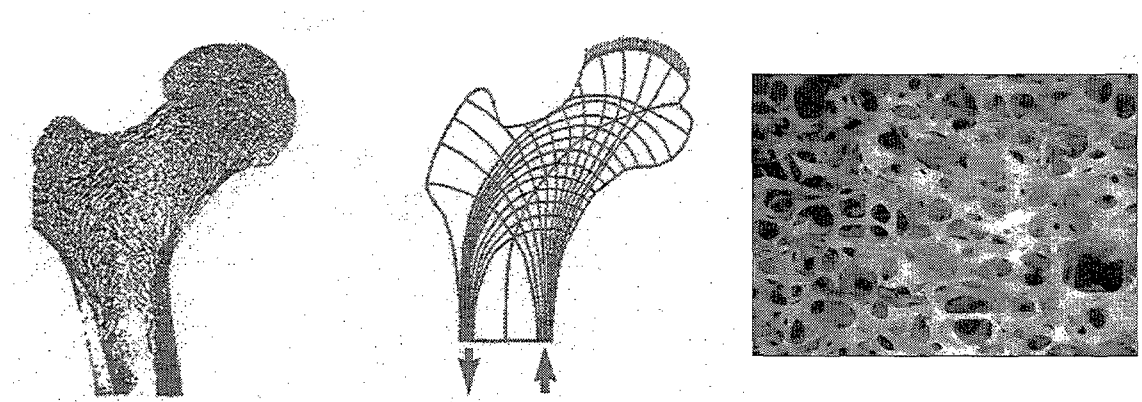


figura 2. 14: Estructura interna de un fémur (Wester, 1997)

La estructura interior de algunos de esos huesos esponjosos están configurados como celdas cúbicas. Es interesante observar que a los nudos concurren 6 barras, así la malla está diseñada como un sistema regular estrictamente ortogonal. Desde un punto de vista cinemático la malla regular falla ante ciertas situaciones singulares para las que no está preparado. Este efecto se puede ver en muchos otros sistemas reticulados, por ejemplo y muy común el entramado espacial que toma como módulo la pirámide de

base cuadrada, en este caso a cada nudo se unen 8 barras, el sistema es rígido a flexión pero no a torsión, pese a ser altamente redundante.

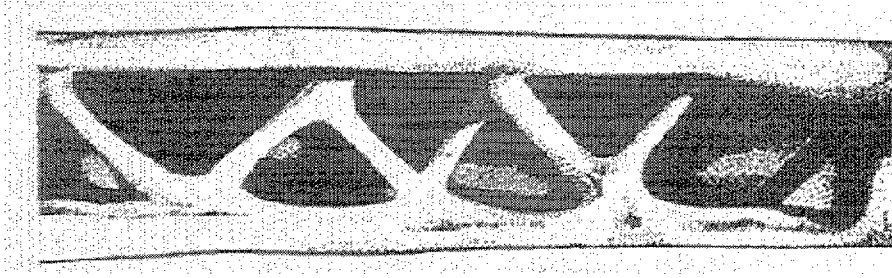


figura 2. 15: Hueso metacarpiano del ala de un buitre similar a una cercha tipo warren.

(Thompson, 1961)

## 2.2 Los modelos físicos en la búsqueda de formas laminares.

Las primeras formas laminares tenían una geometría sencilla. Las formas más clásicas de láminas tienen formas regulares en principio por facilidad constructiva, como por ejemplo secciones de esfera. El desarrollo de la teoría de láminas añadió otra razón, la facilidad en la definición analítica, aparecen entonces los conoides, los paraboloides, los hiperboloides, etc.

Con los ensayos de modelos físicos realizados por el ingeniero Heinz Isler desde 1954 surgen nuevas ideas; se recrea con formas y materiales de manera creativa, en ocasiones llevándolo a la práctica en un proyecto concreto. El origen de sus fundamentos radica en la imitación de la naturaleza en su manera de producir formas estructurales, *dado que ha demostrado la cualidad de obtener formas que resistan el máximo esfuerzo con el mínimo material durante millones de años* (Isler, 1991). Encuentra diversos ejemplos de estructuras laminares en la naturaleza viva, en cáscaras de semillas, pétalos de flores, caparazones de insectos; o en formaciones rocosas naturales como la corteza terrestre. Destacar dos publicaciones que recogen la aportación de este ingeniero a la búsqueda de formas en láminas: Ramm (1989) y Chilton (2000).

Diversos trabajos con modelos físicos, que difieren entre sí en el proceso y el material empleado, conducen a diferentes formas, procedimientos y materiales condicionan las características mecánicas de ésta. Por supuesto el material de ensayo y

el real están relacionados intentando que tengan similares tendencias en el diagrama tensión deformación. Según éstos se pueden agrupar de la siguiente manera:

### **2.2.1 Modelos suspendidos:**

Los modelos colgados e invertidos, tienen sus orígenes en el proceso de invertir la catenaria de un arco. Las bóvedas nubias, contemporáneas de los faraones, sugieren que el procedimiento puede contar con milenios de antigüedad. Este método fue empleado por Giovanni Poleni en 1748 en su informe para la cúpula de S. Pedro de Roma y Rondelet en el Panteón de Francia en París. También Gaudí experimentó con la inversión de redes de cuerdas en diferentes edificaciones como la capilla de la Colonia Güell o la Sagrada Familia, ambas en Barcelona. Este procedimiento ha servido de aplicación a estructuras de fábrica. En la segunda mitad del siglo XX este principio se aplica al diseño de láminas de hormigón armado. En este caso se trata de cargar la membrana flexible, habitualmente con el peso propio, obteniéndose un estado de equilibrio con esfuerzos de tracción. Al rigidizar el modelo e invertirlo se obtiene una cáscara a compresión para el mismo caso de cargas, aparecen así formas muy ligeras. Este proceso de inversión está enfocado a materiales que no pueden resistir tracciones como lo es el hormigón.

Heinz Isler introduce esta técnica en los años 50 del siglo XX, obteniendo formas para estructuras laminares que llevará a la construcción en láminas de hormigón armado. Para ello utiliza telas o redes de hilos (de lana o algodón) bañados en un fluido (agua, fluido de poliéster o parafina líquida). Al dejar que se solidifiquen obtiene un modelo rígido de lámina muy ligera y delgada que resiste su propio peso únicamente mediante esfuerzos de compresión. La forma obtenida dependerá de las condiciones de apoyo y cargas, la dirección y longitud de los hilos de las telas, etc., existiendo enormes posibilidades de llegar a formas muy diversas (Ramm, 1989; Ramm, 2004; Chilton, 2000).

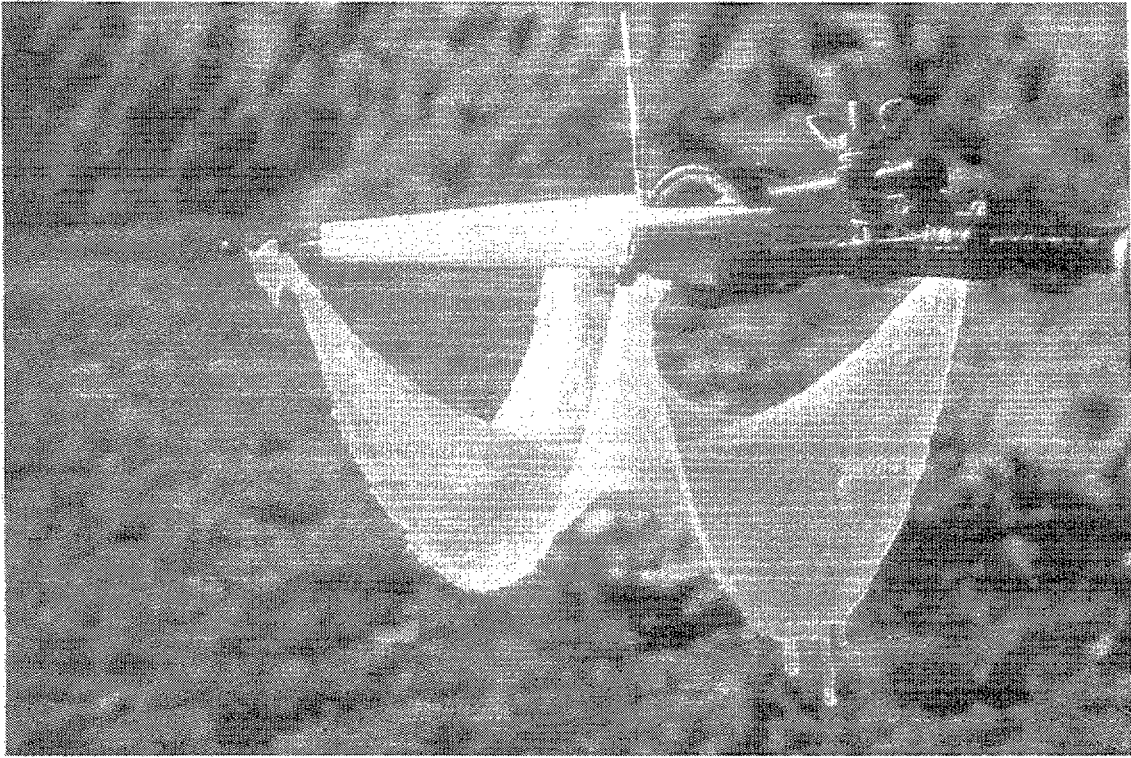


figura 2. 16: Telas colgadas.Experimento de Heinz Isler (Ramm, 1989: 85).

Este procedimiento tiene como condicionante la longitud de tela empleada o la disposición de los hilos respecto a los apoyos.

### 2.2.2 Modelo homeostático.

Similar proceso al anterior, es el seguido por Oscar Andrés (Andrés, 1994), el modelo homeostático, en esta ocasión emplea una membrana de plástico, al introducirla en un horno y elevar la temperatura pierde su rigidez y se deforma bajo las cargas; al enfriarse en la posición deformada vuelve a rigidizarse pudiendo así examinar el modelo. Este método tiene como condicionante la temperatura del horno o el tiempo que se mantienen al modelo en su interior, y de ello dependerá, en parte, la forma final.



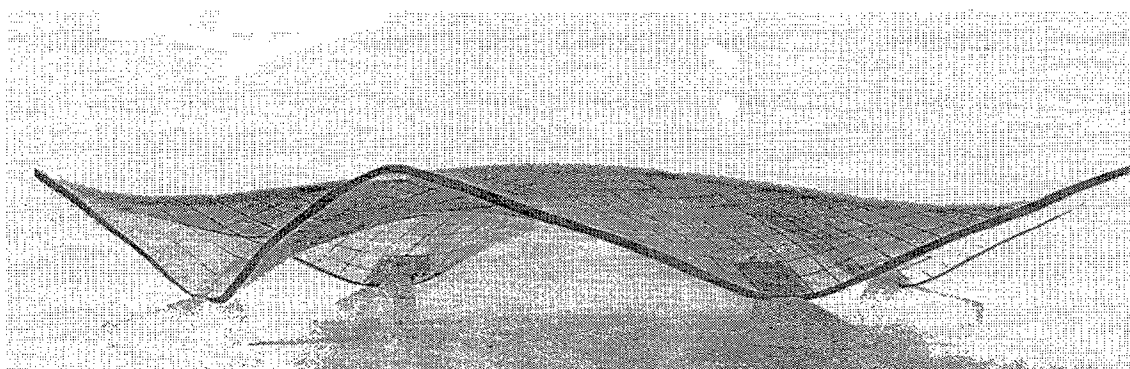


figura 2. 17: Modelos invertidos plásticos.

Maqueta de Oscar Andrés, modelos n. 4, (Andrés, 1994).

### 2.2.3 Modelos neumáticos.

El procedimiento llevado a cabo con los modelos neumáticos es el caso de una membrana flexible sujeta por los bordes y bajo la acción de una presión uniforme perpendicular a su superficie. Heinz Isler ha empleado este procedimiento para generar láminas muy rebajadas, donde la diferencia entre la presión aplicada y la acción real, vertical de gravedad, es menor. Con el cambio de signo de los esfuerzos se consigue un estado fundamentalmente de compresiones ideal para construcciones en hormigón armado. (Ramm, 1989)

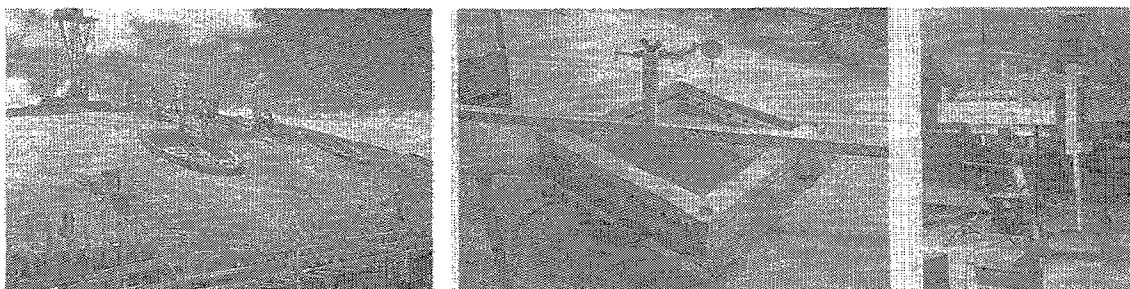


figura 2. 18: Modelos neumáticos. Cáscara de Isler de 54m x 58m para nave y almacén, búsqueda y medición de la forma, (fig. Ramm, 1989: 50, 51).

### 2.2.4 Modelos pretensados

En estos modelos la acción de las cargas se transmiten por medio de mástiles. Un material muy empleado para la obtención de estas formas son las láminas de agua jabonosa. Se trata de un material de peso propio prácticamente despreciable, al que se somete a la acción de las cargas por medio de mástiles. Se producen superficies de doble curvatura y de sentido contrario con igual tensión, de tracción, en todas las direcciones.

Como se ha visto, Frei Otto trabajó con este tipo de experimentos y aplicó este método a la obtención de formas iniciales en diversos proyectos, como por ejemplo la cubierta del estadio para los Juegos Olímpicos en Munich (figura 2. 19)

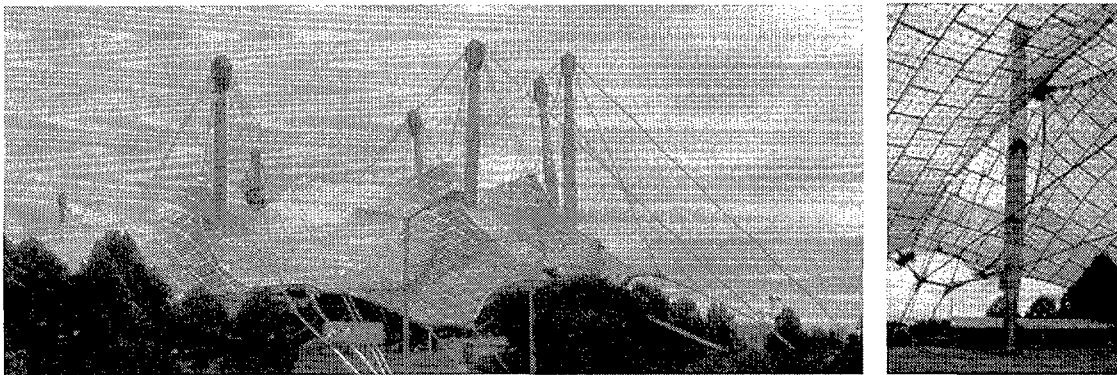


figura 2. 19: Palacio de los deportes de Frei Otto en Munich.

La forma inicial la obtiene con un modelo pretensado, finalmente realizada con una malla en dos direcciones de igual dimensionado de cables de acero.

De nuevo se encuentran experimentos de Heinz Isler en esta línea (figura 2. 20), con telas humedecidas, como en modelos anteriores, y mástiles, obtiene unas estructuras traccionadas; una vez rigidizado se quita el mástil manteniéndose la tela por sí misma produciéndose una inversión de esfuerzos, (Ramm, 1989:89, Isler, 1997b)





figura 2. 20: Telas pretensadas.

Cabaña de hielo de 6m de alto y 2 cm de espesor de hielo, (Ramm, 1989: 89)

### 2.3 Simulaciones numéricas

El empleo de modelos físicos tiene sus limitaciones, en general son métodos ideales para casos de una carga dominante que influya substancialmente en la forma final, muy próximo a lo que ocurre con las láminas de hormigón armado. Sin embargo no se consideran los efectos de otras cargas como las de nieve, viento o alternancias de carga, por lo que la forma experimentada podría no ser válida. El caso particular de los modelos neumáticos, como ya se ha visto, la carga aplicada no coincide con la carga real aproximándose ambas en estructuras rebajadas.

En caso de inversión de esfuerzos una lámina puede mostrar inestabilidad por pandeo local, un aspecto indeseado y que no se aprecia en el modelo.

Por otra parte las características del material empleado en la elaboración del modelo no coinciden con las del que se empleará en la construcción real, por lo que no representa la realidad literalmente. La forma encontrada puede ser diferente en función

de material empleado en el modelo, incluso, en el caso de utilizar telas, también influye la dirección del tejido.

Independientemente del procedimiento seguido, después de la experimentación con los modelos físicos, es necesaria la medición del modelo, por ejemplo con fotogrametría, para pasar los datos a un programa de CAD, y obtener un modelo estructural que sirva como base para un análisis posterior. Entonces se introducen todos los factores que afectarán a la estructura real, como el pandeo, el comportamiento del material real, el espesor de la pieza. Esta fase sirve para corregir ligeramente la geometría llegando a la configuración definitiva, mediante un proceso de prueba y error.

La búsqueda de formas laminares mediante el uso de aplicaciones informáticas que simulan los procesos físicos, surgen para evitar ciertas desventajas de los anteriores. En general son más flexibles y, por tanto, es más fácil manipular la variación de los parámetros, se pueden incluir las características del material real desde el principio, pero la principal ventaja es que en el proceso del proyecto, ya se tiene la forma inmediatamente digitalizada para emplear por diferentes programas.

En este apartado se incluyen diferentes métodos que simulan los procesos físicos mediante aplicaciones informáticas, éstas en general utilizan el método de análisis de los elementos finitos, en ocasiones es un proceso iterativo de análisis lineales y en otras es no lineal.

Entre otros se encuentra el programa desarrollado en 1981 por John Abel de la Universidad de Cornell en Ithaca, para generar formas infladas simulando el mismo proceso llevado a cabo por los ensayos con modelos físicos que necesita una corrección de la curvatura en las esquinas (Isler 1993).

### **2.3.1 Imitación a los modelos homeostáticos.**

En este caso se reproduce el fenómeno mediante un análisis lineal iterativo, la idea forma parte del seminario de impartido por Moisset sobre proyecto de formas en estructuras laminares en arquitectura (Moisset, 1999). Para ello se ha empleado un programa comercial de análisis de estructuras laminares por medio del método de los elementos finitos ANSYS-ED 5.3. (Orta & Rodríguez de Rivas, 1999: 13.1,14.2). En

este procedimiento se parte de una estructura plana, a la que se aplica la carga y se realiza un primer análisis. La deformada obtenida se amplía multiplicando por un factor, así se obtiene una nueva geometría, será la lámina inicial. Posteriormente se realiza una serie de análisis lineales iterativos en los que se va corrigiendo la geometría con la posición de la deformada del análisis anterior.

De esta forma se pueden utilizar las características reales del material con el que se construirá la lámina.

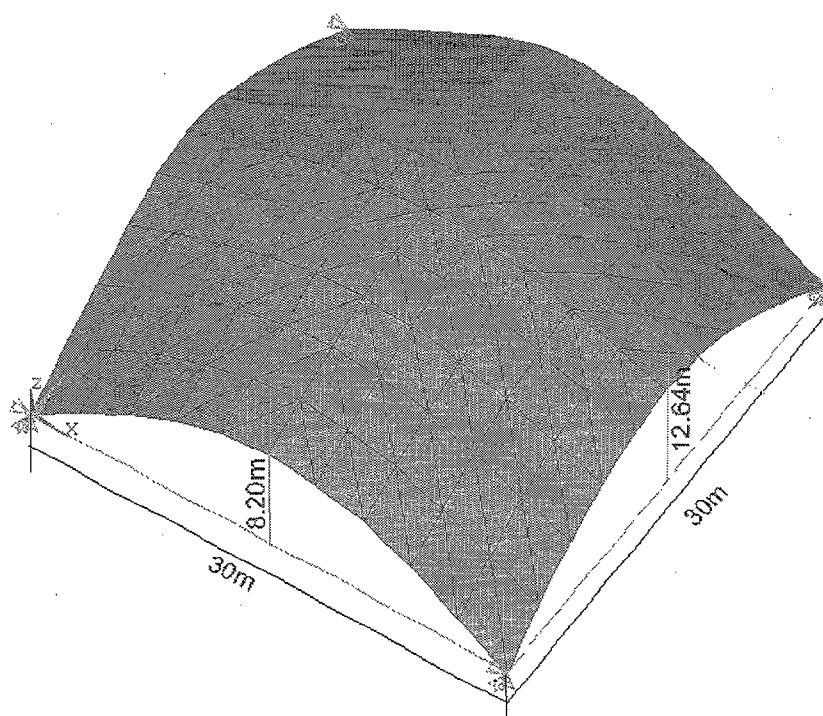


figura 2. 21: Lamina final (Orta & Rodríguez de Rivas, 1999)

### 2.3.2 Imitación de los modelos pretensados

Bletzinger (1998) entiende que el problema de la búsqueda de formas en láminas es similar al problema de encontrar superficies mínimas dado un contorno fijo, estas superficies experimentalmente se han obtenido por medio de láminas jabonosas. En este

caso se emplea un algoritmo que está inspirado en el método empleado por Frei Otto consiguiendo superficies que determinan un campo de tensiones isótropo.

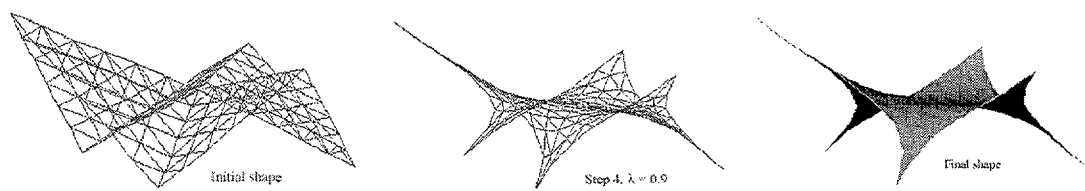


figura 2. 22: Ejemplo de aplicación del método (Bletzinger, 1998)

2.3.3 Imitación a los modelos suspendidos

Se trata de una simulación numérica llevada a cabo por Ramm (2000) basada en una teoría de no linealidad geométrica incluyendo deformaciones finitas. Analiza la influencia de la orientación del tejido bajo la misma carga.

Un proceso iterativo que concluye cuando se han alcanzado los requisitos mecánicos y estéticos en la forma (figura 2. 23).

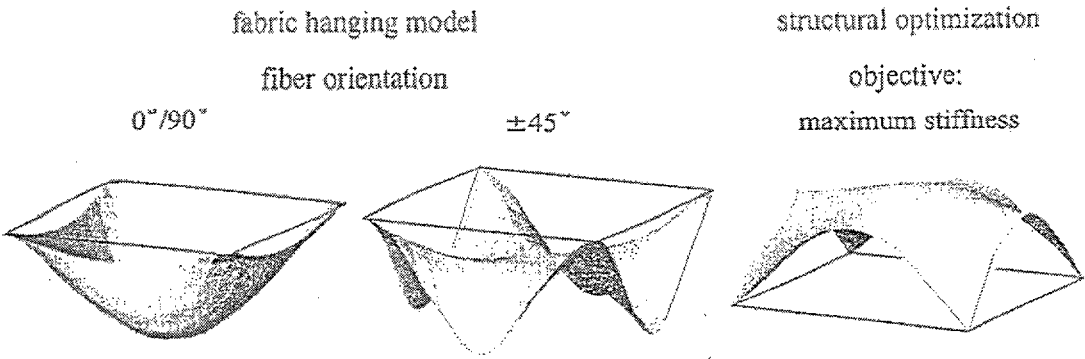


figura 2. 23: Modelos colgados, simulación numérica (Ramm, 2000).

## 2.4 Búsqueda de formas laminares en la actualidad: algoritmos matemáticos

Los más recientes métodos de búsqueda de formas laminares se han apoyado en métodos analíticos con métodos de optimación que han de recurrir a la información de las derivadas de la función objetivo y de las restricciones del problema<sup>1</sup>.

Recientemente Ansola *et alli.* (2002a, 2002b) buscan optimizar la forma de la lámina y la distribución del material al mismo tiempo por medio de un análisis de sensibilidad. Para ello necesitan conocer las derivadas de la función objetivo y de las restricciones, esta información se aplica a cada variable de diseño en cada iteración. En la figura 2. 24 se puede ver el flujo general del programa y la solución a un problema de optimación planteado.

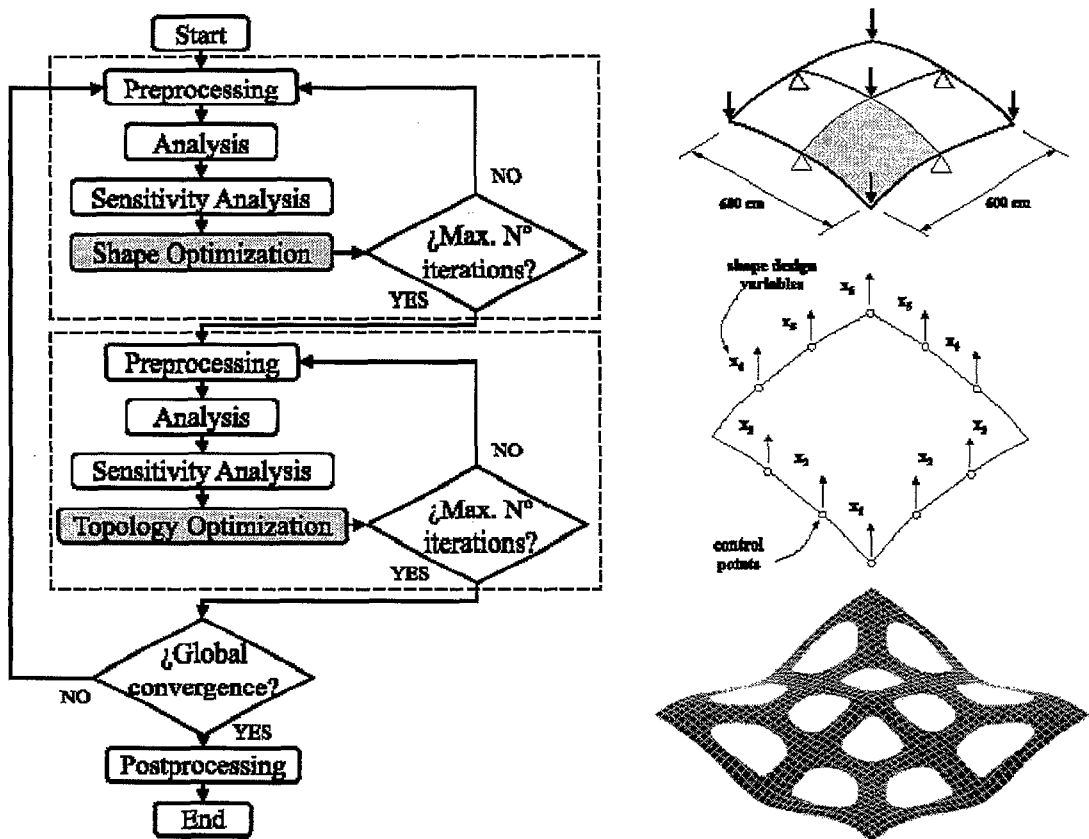


figura 2. 24: Flujo del programa y solución a un problema de optimación.(Ansola *et alli*, 2002a)

<sup>1</sup> En el capítulo 3 se verá una clasificación de los métodos de optimación en función de su necesidad de información sobre las derivadas.

En una línea similar ya había trabajado E. Ramm y sus colegas quienes han desarrollado diferentes programas aplicando el análisis por el método de los elementos finitos buscando. Su objetivo es buscar formas óptimas en láminas basandose en las ecuaciones de equilibrio de membrana (ver Ramm, 1992, Ramm *et alli*, 1993 y Bletzinger *et alli*, 1996). En esta última referencia se busca la optimación de la topología de una lámina esférica.

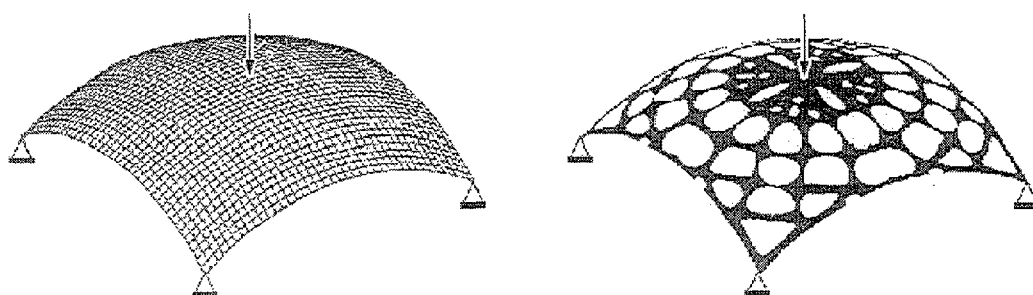


figura 2. 25: Optimación de topología de una lámina esférica, (Bletzinger *et alli*, 1996)

El procedimiento de E. Ramm emplea técnicas de elementos finitos que requieren el uso secuencial de análisis estructural combinado con algoritmos de sensibilidad. El cálculo de las sensibilidades de desplazamientos, esfuerzos, coacciones de frecuencias naturales, respecto a las variables de diseño, requiere la evaluación de derivadas y gradientes de difícil cálculo, ya sea analítico o numérico.

Choi *et alli*, (2000) emplean un análisis de sensibilidad para optimizar la forma y topología de láminas de doble curvatura a la vez de los mecanismos de unión como la localización de puntos de soldadura que maximicen la rigidez de la estructura.

Ohmori crea un programa de optimación de estructuras laminares, para ello emplea un método de análisis de sensibilidad. La función objetivo es el momento flector de la barra, del que se busca el mínimo (Ohmori & Yamamoto, 1998). Este método permite una ligera corrección de la posición de los nodos, pero la forma inicial de la estructura es determinante en el comportamiento general. Como se puede ver en la figura 2. 26 los resultados solo producen ligeros cambios.

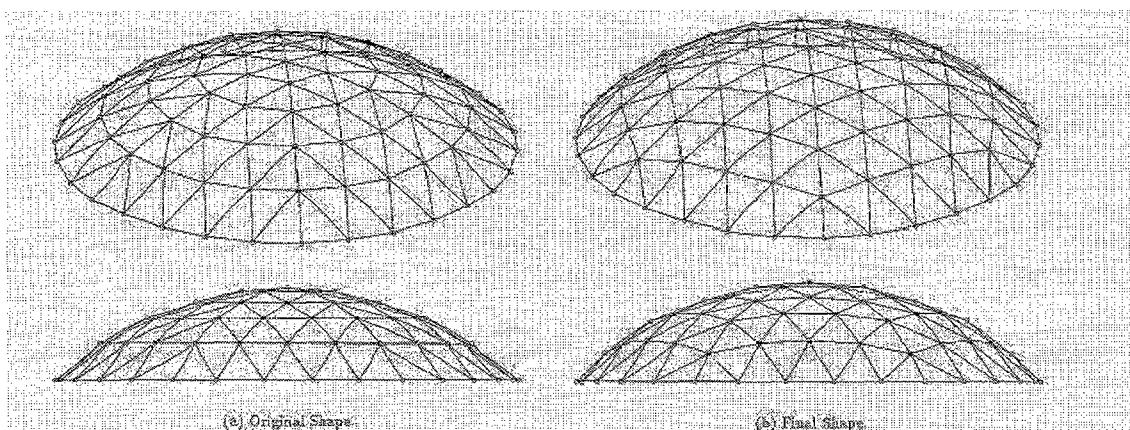


figura 2. 26: Forma inicial y final (Ohmori & Yamamoto, 1998).

Utilizando el algoritmo genético<sup>ii</sup>, Ambur y Navin (2001) buscan la curvatura óptima en láminas nervadas, a modo de rigidizadores, sujetas a pandeo. El objeto de su estudio es la aplicación a la optimación del fuselaje de naves, de hecho los autores pertenecen a la NASA. Los ejemplos de aplicación tienen una configuración y condiciones de carga lejanas a la situación en los problemas de edificación. Similar es el caso de Awrejcewicz y Krysko (2003) quienes estudian la optimación de láminas con el fin de optimizar el fuselaje de aeronaves, de nuevo en este caso las condiciones del problema son muy diferentes a la edificación al tener gran importancia las propiedades dinámicas.

También se ha avanzado en otro aspecto del estudio de las láminas, en el análisis de las mismas, en diferentes condiciones, bajo carga de impacto a baja velocidad (Swaddiwudhipong et al., 2002), ante el pandeo dinámico de láminas reticuladas de una única capa (Kumagai, 2003), análisis no lineal de estructuras reticuladas espaciales (Hsiao-Hui Lee, 2003).

---

<sup>ii</sup> En el capítulo 3 se describe con más detalle este algoritmo de optimación. Se basa en principios genéticos, de ahí su nombre, y la teoría de la selección natural.

## Capítulo 3

### Métodos de optimación

Diariamente en el ámbito de la construcción surge la cuestión de saber cual es la configuración de una estructura que resulta mejor. Se combinan diversas exigencias, las puramente estructurales, (estabilidad, resistencia y rigidez) con cuestiones de durabilidad, y las restricciones que impone a su vez la adaptación al uso. Una estructura es aceptable si cumple con todos estos requisitos, pero como su construcción real es costosa, también se busca la que cumpliendo todos estos requisitos tenga un coste mínimo. Este es un problema de búsqueda del óptimo y consistente en encontrar la mejor solución posible.

En este capítulo se introducirá el problema de encontrar el óptimo de una función, comenzando por su descripción matemática. A continuación se particulariza a la optimación de estructuras, se verá a qué clase de problema nos enfrentamos en esta tesis. Después de ver una clasificación de los diferentes métodos de optimación, se elige uno adecuado al problema planteado. Su aplicación se verá en los siguientes capítulos con la búsqueda de óptimos en láminas.

#### 3.1 Descripción del problema

A continuación se expone una breve descripción matemática del problema de optimación, para una descripción más exhaustiva se puede consultar Banichuk, 1990, o Hernández, (1990).

En términos generales la propiedad a optimar se refleja en la función objetivo  $f(\underline{x})$ , que condensa lo esencial del problema, mientras el objeto se describe mediante el



conjunto finito de variables contenidas en el vector  $\underline{x}$ . El problema consiste en encontrar el mínimo (o el máximo) de la función  $f(\underline{x})$ , real, escalar, sobre cuyas variables,  $\underline{x}$ , se impone las restricciones de diseño  $g_j(\underline{x})$ , que describen el campo de validez de las soluciones. El problema de maximizar una función es idéntico al de minimar sin más que cambiar de signo a ésta.

La respuesta al problema debe incluir un valor de  $\underline{x}_0$  para el cual efectivamente  $f(\underline{x}_0)$  es óptima. Se trata por tanto, de obtener tanto el óptimo como dónde se encuentra. Formalmente:

Encontrar  $\underline{x}_0$  tal que:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0) &= \min_x f(\underline{x}) \\ \underline{x} &= (x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sujeto a:  $g_j(\underline{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m$

En algunos casos la solución debe resultar eficiente no sólo en un sentido, sino que son varias las propiedades o características que intervienen. Este es el caso de la optimación multiobjetivo. En este tipo de problemas son varias las funciones objetivo que se desean minimar, y el planteamiento del problema da lugar a un vector de funciones objetivo  $\underline{F}(\underline{x})$  que contiene cada una de las características que se deben optimar en el proceso.

$$\underline{F}(\underline{x}) = [f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_K(\underline{x})]$$

En este caso, no todas las funciones objetivo tendrán un mínimo para los mismos valores de las variables, por tanto no es habitual que se alcance la solución en el mismo punto. Para tratar estas situaciones resulta necesario utilizar el concepto de *mínimos de Pareto*. Estos se caracterizan por ser un rango de valores que, moviéndose en él, al disminuir alguna de las funciones objetivo, se incrementa inevitablemente al menos una de las funciones objetivo restantes. Existe, por tanto una compensación entre los distintos objetivos. Fuera de ese rango todas ellas aumentan. El ejemplo de la siguiente figura representa un problema de optimación multiobjetivo con dos funciones  $f_1(\underline{x})$  y  $f_2(\underline{x})$ , para la misma variable, los mínimos de Pareto son los valores de la variable  $\underline{x}$  que están entre los mínimos  $f_1^*$  y  $f_2^*$  de cada una de las funciones objetivo.

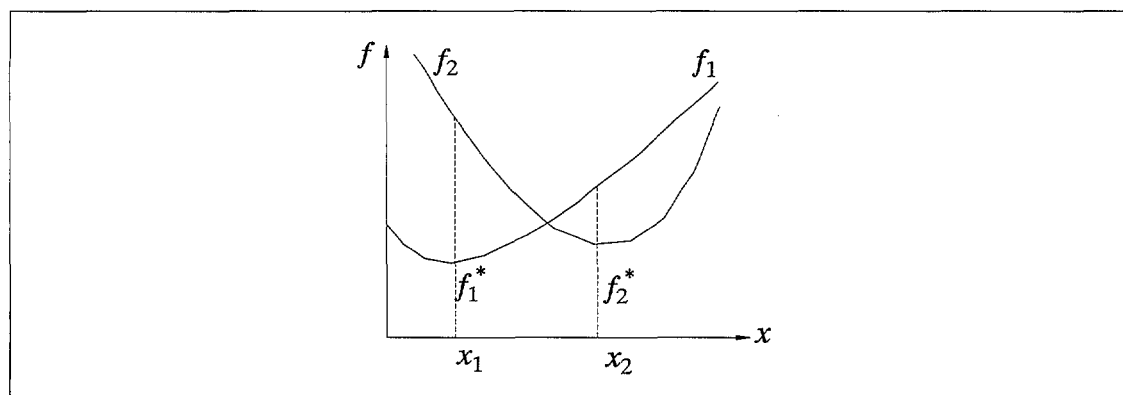


figura 3. 1: Mínimos de Pareto

En este sentido Vázquez denomina conjunto de soluciones *no-peores* al intervalo, en la figura, comprendido entre los valores  $[x_1, x_2]$ .

La optimación multiobjetivo corresponde a una situación habitual en la ingeniería cuando se desea mejorar varias de las características de la estructura que se está considerando. Por ello la solución no es única y no existe una minimación en términos estrictos. Entre la bibliografía consultada se encuentran ejemplos de aplicación a la optimación multiobjetivo utilizando el algoritmo genético<sup>iii</sup> (Kwan-Soon, 2004) o el recocido simulado<sup>iv</sup> (Bennage, 1995).

La manera más sencilla, y la aplicada más habitualmente en problemas sencillos, de obtener el mínimo de una función es por medio del cálculo diferencial, siempre que la estructura de  $f$  y de  $\underline{x}$  permitan calcular derivadas parciales o gradientes. El valor mínimo se encuentra donde la primera derivada se hace cero y la segunda derivada es positiva en cualquier dirección.

Un caso de fácil resolución es el de un problema convexo: si la función objetivo

---

<sup>iii</sup> Se puede encontrar en el apartado 3.4 de esta tesis una descripción de este algoritmo de optimación y su clasificación dentro de los diferentes métodos (apartado 3.3.3). En este momento solo se adelanta que se basa en principios genéticos, de ahí su nombre, y la teoría de la selección natural.

<sup>iv</sup> Este ha sido el algoritmo elegido para resolver los problemas de optimación planteados en esta tesis, su clasificación dentro de diferentes métodos se puede encontrar en el apartado 3.3.3 y su descripción en el apartado 3.5.

es convexa<sup>v</sup> y el dominio conformado por las restricciones es convexo, entonces el problema es convexo y se tiene un solo óptimo. En la siguiente figura aparece el ejemplo de una función convexa y de un dominio convexo.

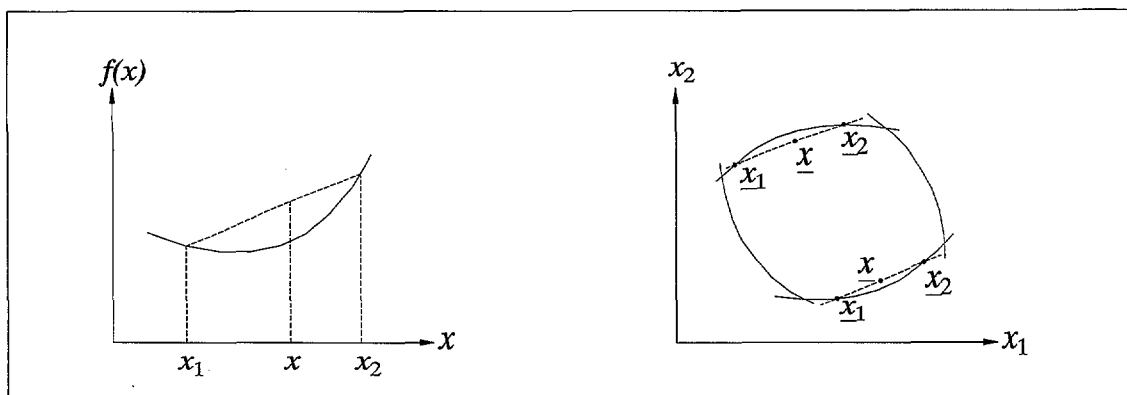


figura 3. 2: Problema convexo en una función y un dominio

Los problemas lineales son un caso particular de los problemas convexos, en ellos las funciones  $f$  y  $g$  son lineales. Una función lineal es convexa y cóncava al mismo tiempo. El problema contiene un único mínimo y éste es la solución.

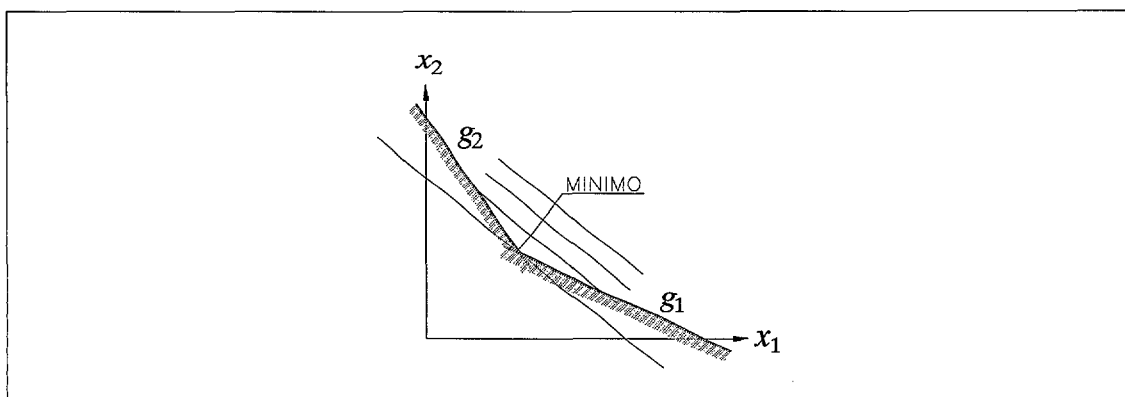


figura 3. 3: Problema lineal

<sup>v</sup>Una función es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ésta, el segmento que los une queda encima de todos los puntos de la función comprendidos entre ambos. Si el segmento queda por debajo, la función sería cóncava. También se puede definir una función convexa o cóncava a aquella cuya curvatura es monótonamente negativa o positiva.

Para que un dominio sea convexo, ha de suceder que pertenezcan a él todos los puntos de un segmento trazado al unir dos puntos cualesquiera del mismo.

Un problema no convexo puede tener varios óptimos locales y sólo uno de ellos, el óptimo global, es la solución del problema. Un óptimo local se caracteriza por ser  $f$  menor que en cualquier otro punto cercano, dentro del dominio; pero pueden existir otros puntos en tales condiciones y entre ellos se encuentra el óptimo global. Así si se ordenan estos puntos,  $x$ , por el valor que producen en la función,  $f(x)$ , el que produzca el menor de todos ellos será el mínimo global.

Un ejemplo de una función con múltiples óptimos locales, en la que sólo hay un óptimo global, sería  $f(x)=\cos(14.5x-0.3)+(x+0.2)x$ , cuya representación grafica se muestra a continuación. El óptimo global sucede en el punto  $x=0.195065$  con un valor para la función de  $-1.00088$ . La obtención de esta solución resulta dificultosa por medio del cálculo diferencial.

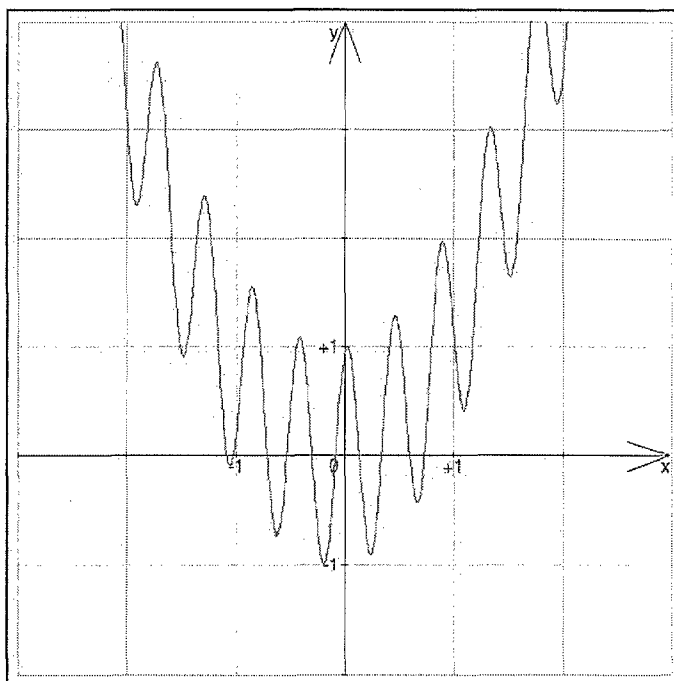


figura 3. 4: Representación gráfica de la función  $f(x)=\cos(14.5x-0.3)+(x+0.2)x$   
ejemplo resuelto en <http://www.taygeta.com/annealing/demo1.html> con el recocido simulado.

Diferentes situaciones que se pueden encontrar en un problema de optimación, se muestran en la siguiente figura:

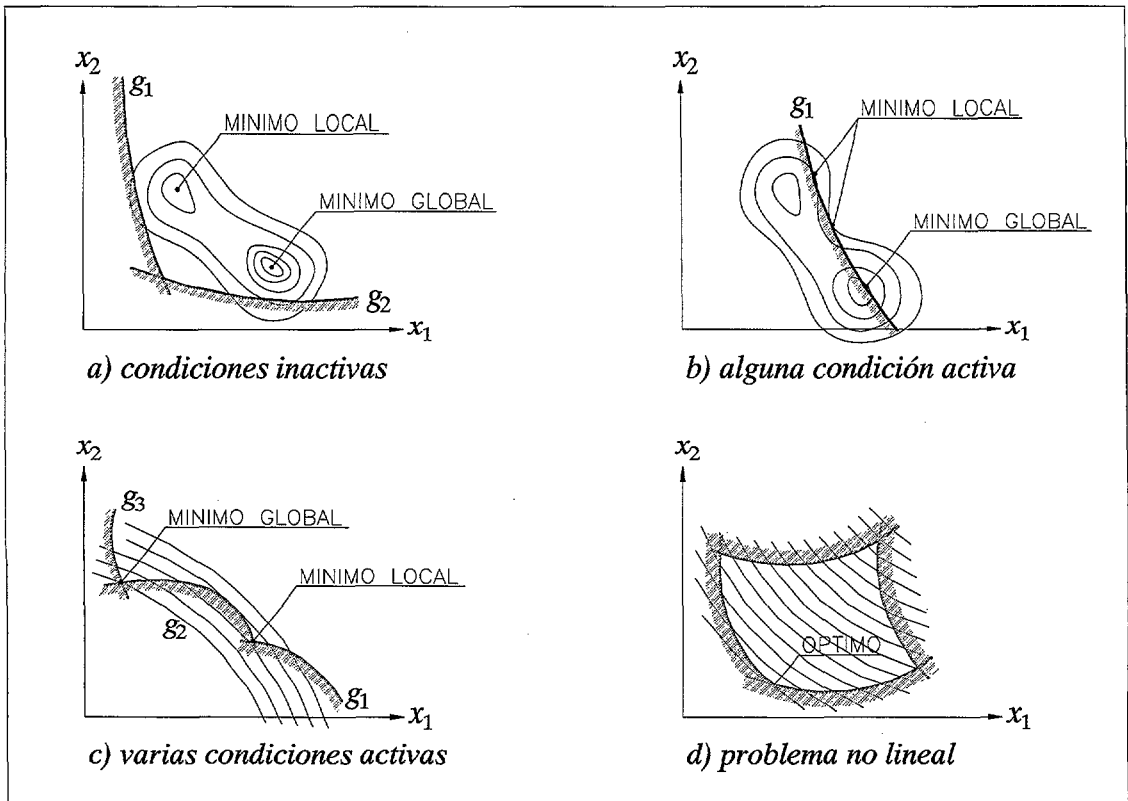


figura 3. 5: Problemas de optimación (Hernández. 1990)

- Varios mínimos locales situados en el interior de la región de diseño, en este caso las restricciones de diseño  $g_j(\underline{x})$  son pasivas y el problema podría estudiarse como una optimación incondicionada.
- Varios mínimos locales debidos a la geometría de la función objetivo, que contienen alguna restricción  $g_I(\underline{x})$  activa.
- Varios mínimos locales ocasionados por la geometría de las restricciones  $g_j(\underline{x})$ . El óptimo se produce en el contorno con una o varias restricciones activas.
- Problema no lineal con un solo mínimo como solución.

### 3.2 Optimación de estructuras

En la teoría de estructuras hay dos grandes tipos de problemas que se preguntan por el mínimo de una función. La minimación de la energía potencial del conjunto de cargas y estructura, es la clase de problemas resueltos por el análisis de estructuras. Por otra parte en el ámbito del diseño de estructuras la cuestión es cómo determinar cuales son los mejores diseños posibles. (Vázquez 1995) Ambos se pueden expresar

formalmente con la ecuación (3.1) y, por tanto, se pueden resolver con cualquier procedimiento disponible.

En los problemas de diseño de estructuras, para medir la calidad de diseño se ha de definir una propiedad, que será la función a minimar, con un valor preciso para cada diseño, el más empleado es el peso de la estructura. Las variables, la mayor parte de las veces, representan propiedades mecánicas de los elementos, como el área o la inercia, o bien la geometría por medio de las coordenadas de los nudos.

Las condiciones de diseño más habituales en el ámbito del diseño de estructuras se refieren a tensiones o movimientos en puntos de la estructura, modos de vibración, etc. Se pueden distinguir dos tipos:

a) Las relativas a los estados límite de la estructura se dividen en dos grupos, los últimos y los de servicio.

Los primeros de ellos, los estados límite últimos, no pueden incumplirse sin poner en peligro la seguridad de la estructura o de una parte de ella (estabilidad, resistencia), aportan restricciones al diseño del tipo de la desigualdad siguiente, dónde el efecto de las reacciones debe ser menor o igual al valor admisible.

$$\sigma_s \leq \sigma_{adm}$$

$\sigma_s$  tensión derivada de la sollicitación.

$\sigma_{adm}$  tensión admisible con seguridad.

O bien en otro formato clásico:

$$\sigma_s / \sigma_r \leq 1$$

$\sigma_r$  tensión resistida por la configuración estructural.

Los estados límite de servicio engloban aquellas situaciones de la estructura para las que no se cumplen los requisitos de funcionalidad (deformación, fisuración, vibraciones), las restricciones aportan desigualdades del tipo de la siguiente, en la que el valor producido por efecto de las acciones, debe ser menor o igual al valor límite establecido según el uso.

$$u \leq u_M$$

$u$  deformación de la estructura.  
 $u_M$  deformación máxima admisible.

b) Por otra parte las condiciones de diseño, dependen de criterios estéticos o técnicos y no están vinculados al comportamiento resistente de la estructura. La mayoría de las veces sirven para limitar el campo de existencia de las variables de diseño:

$$x_m \leq x_i \leq x_M \quad i = 1, \dots, n$$

$x_m, x_M$  límites inferior y superior de variación de las variables.

Los criterios de diseño y restricciones siempre pueden expresarse de una forma similar como aparece en las siguientes desigualdades:

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_r} - 1 \leq 0, \quad \frac{u}{u_M} - 1 \leq 0, \quad \frac{x_i}{x_M} - 1 \leq 0 \quad \frac{x_m}{x_i} - 1 \leq 0 \quad (3.2)$$

Esto hace que la naturaleza del problema de optimación de estructuras venga determinado por la función objetivo que no es continua, en la mayoría de los sistemas, y por tanto difícilmente derivable. Las funciones objetivo pueden tener varios óptimos locales en ocasiones muy numerosos. En la práctica de la construcción frecuentemente es necesario el empleo de dimensiones estandarizadas, como son las secciones de las piezas u otras consideraciones; por ello la optimación requiere a menudo considerar variables de diseño discretas, esto provoca saltos y discontinuidades en la función.

Cuando se desean mejorar varias de las características de la estructura que se está considerando, optimación multiobjetivo, los mínimos de Pareto pueden ser muy numerosos, y la solución no es única.

Por lo tanto, los problemas de optimación estructural caen en la clase de problemas no lineales, no convexos, condicionados, con óptimos locales, para los que el cálculo diferencial no es eficiente. El carácter de la función objetivo y de las variables determinará el método a emplear para su resolución.

### 3.3 Métodos de optimación

Existen numerosos métodos para conseguir un óptimo, en ocasiones, ante preguntas sencillas, la decisión puede tomarse mentalmente o con lápiz y papel, pero

ante problemas algo más complejos eso no es posible y es necesario recurrir a procedimientos matemáticos más o menos complejos. Para conocer los caminos que existen, en este apartado se presenta una clasificación y se describen brevemente diversos métodos aplicables a problemas de optimación de funciones. Para ello se atenderá a que requieran evaluar únicamente la función  $f(\underline{x})$  en distintos puntos, o utilicen necesariamente el vector gradiente (primera derivada), e incluso la matriz Hessiana (segundas derivadas). Para ver otras clasificaciones, profundizar en éstos métodos o conocer otro más, se pueden consultar la siguiente bibliografía de referencia: Hernández (1990), Cervera (1990), Farkas (1984), Pedregal (2004).

Para finalizar se tratará con mayor profundidad el método empleado, el recocido simulado.

### 3.3.1 Métodos que emplean la 2ª derivada

En este grupo figuran los métodos analíticos, esencialmente el *cálculo diferencial*. Para su aplicación se requiere derivabilidad suficiente de la función  $f$ . Permiten obtener soluciones generales en casos de problemas sencillos. El óptimo corresponde a un punto donde la derivada primera (vector gradiente) se anula y la derivada segunda (o matriz Hessiana) es definida positiva en cualquier dirección, satisfaciendo las condiciones de ligadura del problema.

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = 0$$

$$H = \nabla^T \nabla f(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \underline{u}^T \cdot H \cdot \underline{u} \geq 0, \forall \underline{u}$$

$$\text{con: } g_j(\underline{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

De haber encontrado más de un punto, óptimos locales, solo el menor de ellos es la solución del problema. En caso de poder aplicar este procedimiento, el resultado



encontrado es la solución exacta, pero no siempre es posible obtener analíticamente el gradiente y el problema se agrava en lo que se refiere a la matriz Hessiana,  $H$ .

Por otra parte hay métodos de aproximación que suministran una solución lo más cercana al óptimo como les es posible, en ocasiones con menor consumo en el cálculo:

La *aproximación cuadrática* se emplea cuando la función se puede aproximar fácilmente a un polinomio de segundo grado (mediante el desarrollo en serie de Taylor). Para encontrar el óptimo es necesario que la derivada parcial de la aproximación de la función respecto de cada variable sea nula

Los *métodos de Newton* evitan la obtención dificultosa de la matriz Hessiana mediante su aproximación. Sólo son aplicables a problemas de optimación incondicionada.

La matriz Hessiana puede ser difícil de obtener analíticamente y cuando debe obtenerse numéricamente puede ser muy costosa en términos computacionales, o incluso imposible, de ahí que se encuentren métodos que evitan su uso, esto justifica la existencia de los métodos del siguiente apartado.

### 3.3.2 Métodos que emplean la 1ª derivada

Son todos aquellos en los que la exploración de la función viene guiada por su gradiente. Usualmente persiguen una solución en las cercanías de un punto de partida con lo que si existe más de un mínimo local, el resultado final dependerá del punto de partida elegido, de esta manera puede no encontrarse el óptimo global. Un ejemplo de aplicación lo encontramos en Best, (1994).

El método de *aproximaciones sucesivas*, también llamado *método de gradiente*, se encuadra en esta categoría. (Bonnans, 2003), realiza una evaluación del valor del gradiente de la función en diferentes puntos, repitiendo el proceso de forma iterativa en otros puntos cercanos al de partida.

La discontinuidad de la función y no convexidad del dominio, dificulta la consecución del óptimo global en este tipo de métodos.

### 3.3.3 Métodos que únicamente evalúan la función objetivo

Los métodos anteriormente expuestos se adecúan mejor a problemas con variables continuas, donde la función objetivo es fácilmente derivable. No son adecuados para problemas con variables discretas o mezcla de variables discretas y continuas. En estos casos se necesitan técnicas de optimación que tengan en cuenta las restricciones del diseño. Este es el caso de optimación de estructuras como se ha visto anteriormente.

La no dependencia de la información de las derivadas, primera y segunda, permite la aplicación de estos métodos a problemas no convexos con variables discretas y continuas y funciones no derivables.

De ahí surgen los métodos que se basan exclusivamente en la exploración de la función a optimar y no requieren información alguna sobre sus derivadas.

El caso más sencillo ocurre cuando tanto  $f$  como  $g$  son polinomios de primer orden, nos encontramos entonces ante un problema convexo bastante simple. Entonces se pueden aplicar los métodos de *programación lineal* que buscan la solución en los contornos de la región formada por las restricciones, y la encuentran en el único mínimo que aparece. El término *programación* se emplea en el sentido de planificación, y *lineal* por otra parte hace alusión a una propiedad matemática que presentan muchos problemas y que facilita y simplifica su análisis (Bland, 1981). Una particularidad de este procedimiento surge cuando las funciones toman sólo valores enteros o, en algunos casos más complejos, se aplica esta restricción para conseguir una aproximación razonable, entonces se denomina *programación entera* (Pedregal, 2004).

Como no es habitual el encontrar funciones lineales, el mayor interés de este método radica en su empleo en problemas no lineales y no convexos. Mediante una *aproximación lineal* se aplica de manera iterativa.

Los métodos siguientes no reparan en la forma de la función, cualquiera que sea, tan solo utilizan los valores de la función en diferentes puntos, y se va saltando de uno a otro. Se trata de la enumeración, de un tipo de enumeración orientada llamada *branch and bound* y de la exploración aleatoria.

El método de *enumeración* o *búsqueda exhaustiva* consiste en elaborar una relación de todas las posibles soluciones y elegir entre ellas la que hace mínima la función objetivo. Este procedimiento es aplicable a problemas de variables discretas y consigue llegar a la solución exacta, pero puede que el tiempo que lleve evaluar el número total de soluciones sea tan grande que convierta éste en un asunto intratable.

El denominado *branch and bound* es un método de tipo enumerativo donde, en el proceso de búsqueda, se ordena las soluciones encontradas en forma de árbol (Hooker, 2000). Cada rama es un subproblema en el cual el valor de una variable es fijo, por lo tanto hay tantas ramas como valores posibles para la variable, analizando la solución del principio de la rama se puede decidir si seguir por ella o saltar a otra. El orden es tal que la mejor solución encontrada está en un extremo del árbol. De esta manera se reduce el tiempo de búsqueda. Pero puede seguir siendo intratable.

Los métodos hasta aquí nombrados se pueden emplear para resolver problemas con espacios de búsqueda relativamente pequeños. De otra forma hay que incrementar la eficiencia de la búsqueda, reduciendo a la vez los tiempos empleados, no se pretende obtener de esta forma el óptimo absoluto sino valores cercanos al óptimo.

Las técnicas de *exploración aleatoria* evitan la intratabilidad no recorriendo todos los puntos. Son métodos de aproximación al óptimo que, partiendo de un punto dado, genera otro alternativo, y elige de forma sistemática el mejor de los dos. Se sitúan entre las estrategias más simples, son bastante robustas, pero no funcionan mucho mejor que las técnicas de enumeración (Bennage, 1995) en el sentido de que pueden quedar atrapados en óptimos locales y nunca acercarse ni alcanzar las cercanías del óptimo.

Análogo a este método aparece la búsqueda pseudo-aleatoria (Hooker, 2000) en la que el algoritmo se enfrenta al problema de forma recursiva eliminando una variable de cada vez. Es aplicable solo a problemas sin restricciones. Es un método que entrelaza la técnica el *Branch and bound* con la *exploración aleatoria*.

Por último aparecen los que exploran la función objetivo simulando artificialmente un proceso que aparece en la naturaleza. Los tres que se citan no se limitan a explorar en el entorno de una configuración de partida sino que exploran lejos de él evitando quedar atrapados en un óptimo local.

El método *simplex* (de Nelder-Mead), para optimación incondicionada. Simplex es una figura geométrica de  $m > n + 1$  puntos en un espacio  $n$ -dimensional, que se traslada por el espacio de búsqueda hacia el óptimo a la vez que cambia, crece, se contrae. Tiene cierto parecido con una pelota de diámetro variable rodando sobre una superficie, la de la función a optimar, hasta alcanzar el punto más bajo.

El *recocido simulado* y el *algoritmo genético* pertenecen a esta última categoría de métodos de aproximación numérica que emplean solo el conocimiento de la función objetivo. El primero se basa en la analogía entre la minimación de energía de un sistema físico y la minimación de una función objetivo. El segundo en las leyes de evolución y selección natural.

Ambos métodos proporcionan soluciones razonables con un coste computacional razonable. Se pueden aplicar a la resolución de una gran variedad de problemas de optimación, condicionada o no condicionada, con uno o múltiples objetivos, con variables discretas y continuas. Esto hace que sean muy adecuados para la aplicación al caso de optimación de estructuras, aunque todavía su uso práctico no es popular, entre la comunidad científica tienen una gran aceptación y han sido probados en una gran variedad de problemas de optimación. A continuación se expone brevemente el funcionamiento de ambos métodos.

### 3.4 Algoritmo genético

El algoritmo genético (genetic algorithm, GA) es una técnica de optimación y búsqueda basada en los principios genéticos, combinando la teoría de la selección natural, supervivencia del mejor adaptado, con operaciones aleatorias de evolución. Este método se aplica al diseño de, además de estructuras de edificación, chips, motores de aviación, trazados de redes de instalaciones, etc. (Holland, 1992)

En esencia consiste en hacer progresar una población de cromosomas artificiales, que contienen la información codificada por medio de cadenas de bits, listas de ceros y unos. Cada una de ellas se evalúa en función a su adaptación al problema a resolver. Según este valor, aquellas cuyo resultado es mejor se aparean, las inferiores no dejan descendencia. En el transcurso de las generaciones el proceso va convergiendo en una

población de individuos cercanos al óptimo global o en varios núcleos de población agrupados en torno a óptimos locales.

La primera generación se crea de forma aleatoria, el punto de partida no influye en la solución final. Se trabaja con códigos de variables, donde cada carácter es un gen artificial y la cadena, de longitud finita, un cromosoma artificial que representa la información de un individuo.

El algoritmo actúa a la vez sobre el conjunto de la población, obteniéndose por tanto al final del proceso un conjunto de soluciones mejores. El número de individuos de la población permanece constante a lo largo de todo el proceso.

La evaluación de cada individuo consiste en asignarle un valor, se hará de acuerdo al de la función objetivo  $f$ , incorporando penalizaciones por incumplimiento de las condiciones del problema. De esta manera se pueden introducir cambios o nuevos criterios de selección sin modificar el algoritmo, además cuenta con la ventaja adicional de no requerir que las restricciones se expresen en términos de variables.

Los operadores genéticos básicos son tres: reproducción o selección, cruce y mutación. Los dos primeros son los que le confieren la potencia al algoritmo.

El operador *reproducción* determina qué miembros de la población sobrevivirán hasta reproducirse. A cada individuo se le asigna una probabilidad de tener descendencia en la siguiente generación que depende del valor que produce en la función. Los individuos más adaptados tendrán alta probabilidad de contribuir con uno o más descendientes. Por el contrario, si están poco adaptados su probabilidad de reproducción es menor o incluso pueden no tener descendencia alguna.

El *cruce* garantiza la mezcla y recombinación de la información entre la descendencia. En el cruce simple, en el que tan solo hay un punto de corte de la cadena, se elige aleatoriamente una pareja para someterla al cruce. Se selecciona una posición de la cadena también al azar, y se crean dos nuevas cadenas alternando los caracteres de los individuos. Por ejemplo, para dos individuos con una longitud  $l=5$  (11111 y 00000), y una posición de cruce  $k=3$  ( $1 \leq k \leq l-1$ ), los individuos resultantes serán 11100 y 00011.

La *mutación* modifica una muy pequeña parte del total de cadenas. Consiste en cambiar al azar un bit de un individuo también elegido al azar. Este operador sólo se

aplica ocasionalmente, no suele generar progresos en la búsqueda de una solución, pero sí proporciona garantías contra el desarrollo de una población uniforme e incapaz de seguir evolucionando. Si la población es suficientemente grande y diversa este operador no es necesario.

La robustez de este algoritmo se debe a que no elimina de la población los individuos que no cumplen las condiciones del problema, evitando así el converger en el entorno de un individuo que las satisfaga (óptimo local).

Para una descripción más exhaustiva y una fundamentación matemática del algoritmo puede consultarse la obra de Holland (1975) o Goldberg (1989). Sin embargo No hay demostración disponible de que un GA conduzca a la mejor solución del problema Las pruebas disponibles se limitan a asegurar que, cumplidas algunas condiciones técnicas, no muy difíciles, una población suficientemente grande y diversa mejora su aptitud media conforme las generaciones se suceden (Vázquez, 2002). La población tiende a ser, con el tiempo, uniformemente parecida, sin que, al final, se perciba diversidad. Si la población es óptima en sentido absoluto, la población puede ser *clónica* (formada por individuos idénticos).

### 3.5 Recocido simulado

El recocido simulado (simulated annealing, SA) es un algoritmo de optimación que bosqueja una analogía con la minimación de energía en un sistema termodinámico. La búsqueda de un mínimo se simula con la relajación de un sistema de la mecánica estadística donde se emplea un criterio de aceptación probabilístico.

El origen de la analogía se encuentra en el procedimiento para fabricar acero, *recocido*, del que toma el nombre, y en otros fenómenos naturales como los cambios de fase entre un gas y el sólido correspondiente o la precipitación de una sustancia disuelta en agua formando un cristal.

En el proceso del recocido primeramente se eleva la temperatura de la mezcla volviéndose líquida y permitiendo así una gran movilidad de sus partículas. Al dejarse enfriar lentamente, las partículas se van disponiendo ordenadamente a medida que van perdiendo su movilidad, se van acercando a un estado de mínima energía. Si el proceso ha sido lo suficientemente lento la configuración obtenida es más estable y su energía

interna es mínima. En algunos casos estos estados pueden ser reconocidos por su perfección visual, éste es el caso de la forma de un cristal puro cuyas partículas están perfectamente ordenadas.

El recocido simulado establece una correspondencia entre la función objetivo y la energía libre de un sistema termodinámico simple.

El algoritmo sigue el mismo proceso: cada configuración del sistema se describe como un conjunto de variables matemáticas  $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , a cada conjunto le corresponde un valor de energía que puede calcularse mediante alguna ecuación específica,  $f(\underline{x})$ . Un parámetro ( $c \in \mathbb{R}^+$ ) juega un papel análogo al de la temperatura, tomando unos valores altos al principio va disminuyendo paulatinamente.

A continuación se muestra brevemente la formulación matemática del algoritmo.

En un problema general de optimación combinatoria, la propiedad a optimar se refleja en la función objetivo,  $f(\underline{x})$ , que contiene la esencia del problema. El objeto se describe mediante un conjunto finito de variables  $\underline{x}$ . El problema consiste en encontrar el mínimo (o máximo) para la función  $f(\underline{x})$ , con el vector  $\underline{x}$  perteneciente al campo de las soluciones válidas  $\mathbf{X}$ , donde se satisfacen las condiciones de diseño. La solución debe contener un valor  $\underline{x}_0$  que realmente haga óptimo  $f(\underline{x}_0)$ . Entonces la cuestión es obtener el óptimo y dónde se produce. Expresado en términos matemáticos será:

Encontrar  $\underline{x}_0$  para<sup>vi</sup>:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0) &= \min_{\underline{x} \in \mathbf{X}} f(\underline{x}) \\ \underline{x} &= (x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cada conjunto de variables  $\underline{x}$  tiene su correspondencia con un valor en la función objetivo  $f(\underline{x})$ . El parámetro de control ( $c \in \mathbb{R}^+$ ) se utiliza para medir la probabilidad de escoger una solución, y determina el proceso. Este parámetro sería equivalente a la temperatura en la analogía, toma valores altos al principio y va descendiendo lentamente.

---

<sup>vi</sup> Es otra manera de expresar lo mismo que la fórmula (3.1)

El algoritmo comienza con una solución inicial o configuración  $\underline{x}_i$ , sobre una de las variables, definidas previamente para el problema en cuestión, se produce un cambio aleatorio. De esta forma se obtiene una configuración alternativa  $\underline{x}_j$ . Para aceptar la configuración  $\underline{x}_i$ , o la nueva alternativa,  $\underline{x}_j$ , se aplica el criterio de Metrópolis (Vázquez, 1994:42, Aarts, 1989, muestran el criterio con otro lenguaje, para Press et alli, 1988, la función *metrop*):

$$\begin{aligned} \text{si } f(\underline{x}_j) \leq f(\underline{x}_i) & \text{ se acepta } \underline{x}_j \\ \text{si } f(\underline{x}_j) > f(\underline{x}_i) & \text{ se acepta } \underline{x}_j \text{ con una probabilidad de: } \exp((f(\underline{x}_i) - f(\underline{x}_j))/c) \end{aligned} \quad (3.4)$$

siendo:

$\underline{x}_i$	configuración actual.
$\underline{x}_j$	configuración alternativa.
$f(\underline{x}_i), f(\underline{x}_j)$	valores de la función en los estados $i$ y $j$ respectivamente.
$c$	parámetro de control.

De esta forma, los cambios hacia mejores soluciones siempre se aceptan mientras que los cambios a peor sólo a veces pueden ser aceptadas.

Al principio el valor inicial del parámetro de control  $c$  (temperatura) debe tomar valores altos para permitir virtualmente que todas las transiciones sean aceptadas aunque la función objetivo vaya a peor. Así se logra que la probabilidad inicial de aceptación sea cercana a 1.

La temperatura sobre la que se mide la probabilidad de elección y determina la evolución del proceso, va disminuyendo lenta y paulatinamente. Al final del proceso con valores bajos de temperatura y descendiendo, los estados peores tienen menor probabilidad de ser aceptados. El proceso termina cuando cualquier cambio produce un diseño con probabilidad nula de ser aceptado.

En la figura 3. 6 se representa la programación en pseudo pascal del algoritmo, dónde  $x$  representa a la solución estudiada,  $c$  es el parámetro de control,  $M$  el número de transiciones y  $C$  el número de ciclos.



```

procedure SIMULATED _ANNEALING;

begin
  INICIALIZAR ( $x_0$ ,  $c_0$ ,  $M_0$ );
  C:=0;
   $x_i := x_0$ ;
  repeat
    for  $v:=1$  to M do
      begin
        GENERAR_ALTERNATIVA ( $x_j$  from  $x_i$ );
        if  $f(x_j) \leq f(x_i)$  then  $x_i := x_j$ 
        else
          if  $\exp((f(x_i) - f(x_j)) / c_k) > \text{random}[0.1]$  then  $x_i := x_j$ 
        end;

        C:=C+1
        CALCULA_TRANCIONES (M);
        CALCULA_CONTROL ( $c_k$ );
      until criterio_de_parada

  end;

```

figura 3. 6: Programación en pseudo pascal del recocido simulado (Aarts, 1990)

El hecho de que puedan ser elegidos puntos que dan peores valores para la función objetivo convierte al recocido simulado en un algoritmo robusto que evita quedar atrapado en los óptimos locales. De la misma manera, con altos valores de la temperatura (parámetro  $c$ ) al principio del proceso, se asegura la búsqueda en puntos muy distantes al inicial en el espacio. Esto permite alcanzar áreas de la función objetivo con un comportamiento general mejor. Además, en muchos casos, cuando la obtención del óptimo puede ser lenta, el recocido simulado presenta una razonable aproximación al óptimo con un coste computacional razonable.

El recocido simulado es un procedimiento de búsqueda basado en el método de Monte-Carlo usado en estudios de mecánica estadística. El reciente interés en su empleo como una técnica de optimización multivariable comienza con el trabajo de Kirkpatrick

(1983) que muestra la analogía entre simular el recocido de sólidos y la resolución de problemas de optimación combinatoria. Para demostrar la efectividad del recocido simulado aplican el método a dos problemas de optimación combinatoria: el problema del viajante de comercio y la configuración de chips en un diseño de un circuito. Desde entonces esta técnica se ha aplicado a muchos problemas de optimación incluido el diseño de estructuras.

La analogía termodinámica queda demostrada en Vázquez (1994). En las soluciones de los siguientes capítulos se verá como a través de esta búsqueda estocástica se alcanzan soluciones de formas inesperadas y complejas que, aunque no son válidas para la construcción real, resultan extremadamente útiles para extraer conclusiones y obtener parámetros geométricos.

Revisando la literatura existente se ve que la mayoría de las aplicaciones del recocido simulado se limitan a la optimación de un único objetivo. Este es también el caso de las aplicaciones empleadas en esta tesis.

### 3.5.1 Parámetros para el recocido.

Con el fin de caracterizar el proceso del recocido en todos sus aspectos, la velocidad con la que evoluciona el parámetro de control, u horario de temperaturas, y el número de configuraciones que se analizan en cada ciclo de temperatura constante, se describen en este apartado los parámetros que lo determinan.

El recocido se especifica dando los valores de los cinco parámetros que definen el horario de temperaturas, se puede denominar como en Vázquez, (1994) :

$$R\{C, \alpha, \beta, \tau_0, \theta\}.$$

Donde los valores que los definen son los siguientes:

- C     *número de ciclos*, es un valor dado por el usuario al programa, en función de este valor variará el tiempo de ejecución. En cada ciclo se analizan  $\alpha g^\beta$  transiciones a una temperatura constante, es decir, el parámetro de control se mantiene constante.

- $\alpha$  factor para hallar el número de transiciones por ciclo, en función de este valor se harán más o menos transiciones en cada ciclo de temperatura constante.
- $\beta$  exponente para calcular el número de configuraciones exploradas en función del número de grados de libertad  $g$ . De este modo el número de transiciones que se hará en cada ciclo es  $M=\alpha g^\beta$  y el número de configuraciones total exploradas es  $C\alpha g^\beta$ .
- $\tau_0$  *factor de referencia*, también denominado,  $Fr$ , y anteriormente  $c$ , indica el valor de la temperatura inicial en el proceso del recocido, también se puede definir en función del valor de la función objetivo de la solución de partida, en ese caso se denomina  $Fr/Fi$
- $\theta$  tomará valores entre 0 y 1, indica como cambia la temperatura entre ciclos consecutivos, así la temperatura en el ciclo  $i+1$  será  $\tau_{i+1}=\tau_i \cdot \theta$ . De este modo partiendo de una temperatura inicial  $\tau_0$  se obtienen las siguientes, lo que da una lista de valores decrecientes.

Otros dos parámetros que no aparecen en la descripción debido a que no influyen en el horario de temperaturas son los siguientes:

- $\gamma, \delta$  el número de transiciones antes de tomar la primera muestra es  $\gamma g$ , el número de transiciones antes de tomar las siguientes muestras es  $\delta g$ , es decir, dentro de ciclos a temperatura constante. Una muestra es una solución candidata para el algoritmo.

Se puede establecer la relación de estos parámetros con el proceso que aparece en la figura 3. 6 y que se completa en la figura 3. 7 donde se puede ver qué abarca cada ciclo y cómo en su interior se realizan un numero de transiciones  $M$  que, como se ha visto, depende del factor  $\alpha$  y del exponente  $\beta$ . El factor de referencia  $\tau_0$ , se ha representado como  $c_0$ , que en cada ciclo toma el valor  $\tau_k = c_k$

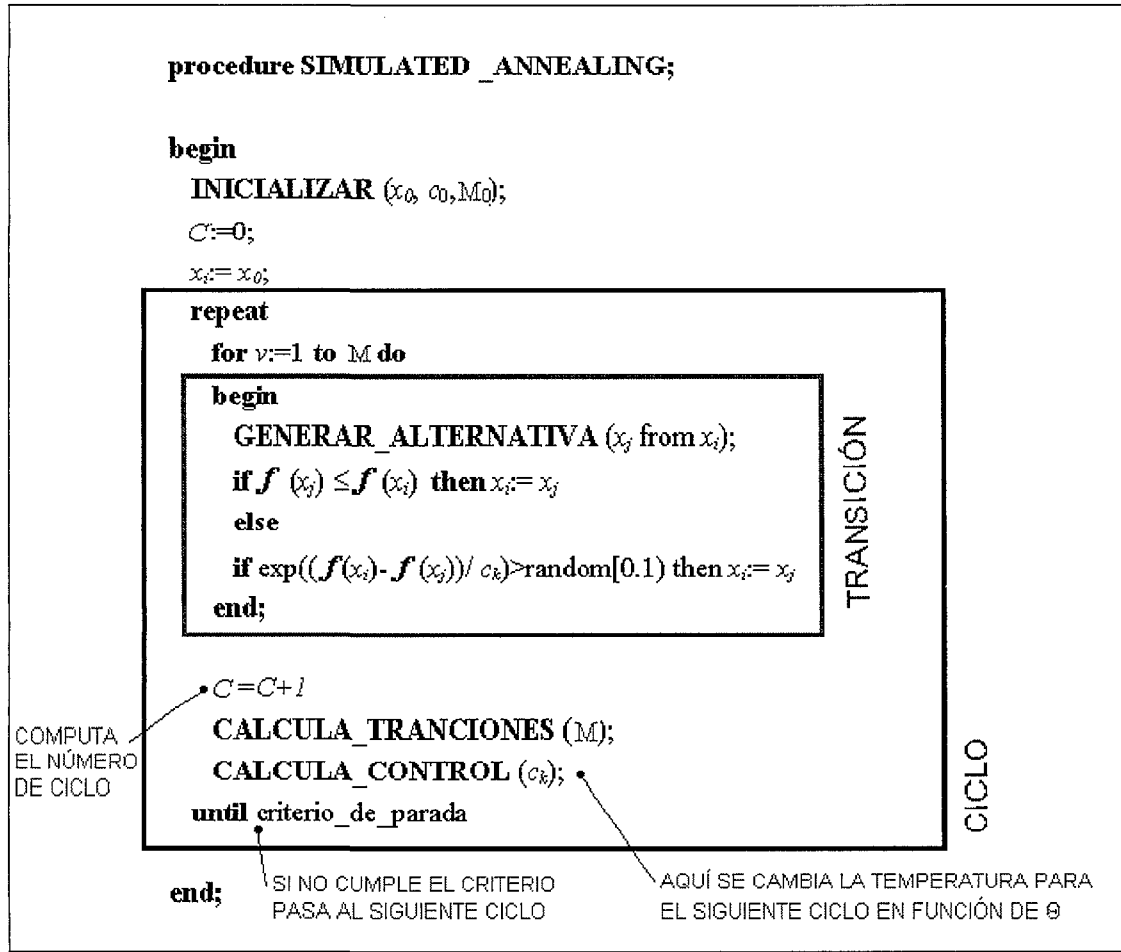


figura 3. 7: Parámetros para el recocido.

El recocido habitualmente empleado en los ejemplos realizados para esta tesis es el que se indica a continuación:  $R\{100, 50, 1, 100 \phi_0, 0.9\}$ , donde  $\phi_0$  es el valor de inicial de la función objetivo. Lo más frecuente es hacer una serie de  $n$  recocidos consecutivos,  $nR\{100, 50, 1, \tau_0, 0.9\}$ , en los que la solución final de cada recocido se emplea como solución inicial de la búsqueda siguiente, siempre se mantienen constantes los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\theta$ , y el número de ciclos similar para las diferentes series. De esta manera se parte de un valor  $\tau_0$  en la primera búsqueda que se indica en cada caso, y para la siguientes de la serie se toma el valor final de la anterior. Las soluciones obtenidas no son idénticas si se hace de esta manera o si se hace con el número total de ciclos, pues al ser un proceso aleatorio las decisiones tomadas en cada caso son diferentes; después de haber realizado diversas comparaciones con otros problemas de optimación, (de cerchas), se observa que las características de la solución final se mantienen.

### 3.5.2 Comportamiento del Recocido Simulado.

Existen estudios que comparan el comportamiento del SA con el GA, en ellos se observa como el GA se encamina más rápido hacia la región prometedora pero afina menos la solución óptima; el SA, por el contrario, es más parsimonioso, pero se acerca significativamente más a la solución óptima. Para la comparación genérica entre SA y GA puede consultarse (Davis, 1987), y para comparación en casos concretos en el contexto del diseño de estructuras véase (Vázquez et Vázquez, 1997) (Vázquez, 1997) y (Vázquez, 1998).

A continuación se muestran unas gráficas (figura 3. 8) en las que se puede apreciar el comportamiento del SA en los ejemplos<sup>vii</sup> desarrollados en el capítulo 5. Los dos cuadros representan lo mismo, tan solo se ha cambiado la escala del eje vertical para poder apreciar con más detalle el comportamiento del principio del proceso (a la izquierda) y del final ( a la derecha). Los dos tipos de línea representan dos gráficas superpuestas de dos casos similares.

En ambos cuadros en el eje horizontal se indican el número de ciclos transcurrido a temperatura constante. En cada ciclo se analizan varias de configuraciones diferentes, la cantidad depende del problema concreto y de sus grados de libertad. En el eje vertical están los valores de la función objetivo para cada ciclo, se ha elegido representar el valor de la configuración inicial dentro de cada ciclo, evidentemente puede adquirir valores muy diversos dentro del ciclo.

En el primer gráfico se aprecia muy bien el comportamiento general del algoritmo en las primeras etapas, llegando a alcanzar la función objetivo un valor mucho mayor al inicial, comienza con una función objetivo rondando los  $20 \times 10^6$  kN.m se alcanzan valores más de 6 veces mayor en las primeras etapas, se están produciendo unos cambios hacia soluciones mucho peores que la inicial buscando en configuraciones

---

<sup>vii</sup> Se adelanta una breve explicación de los ejemplos de los que se extrae la información. Se trata de la búsqueda del óptimo en una estructura tipo lámina, reticulada, de una capa. El ejemplo elegido cubre una superficie cuadrada mediante una lámina de 25 nodos. Se estudia la misma configuración inicial para recinto completo (Rc) para el cual la estructura puede ocupar la totalidad del espacio, y para recinto positivo (Rp), en este segundo caso solo puede estar en el subespacio definido por la coordenada  $z > 0$  para todos los puntos de la estructura.

muy distantes a ésta. A partir el ciclo 50 estos saltos no son tan bruscos, ya se han adquirido ciertas características propias de las configuraciones óptimas, y ya, a partir del ciclo 70, la función objetivo va tomando valores con una tendencia prácticamente decreciente. Cada vez con menos saltos se va acercando a la solución final, en esta última etapa es cuando se comienzan a ajustar otros detalles de diseño de menor influencia en la función objetivo.

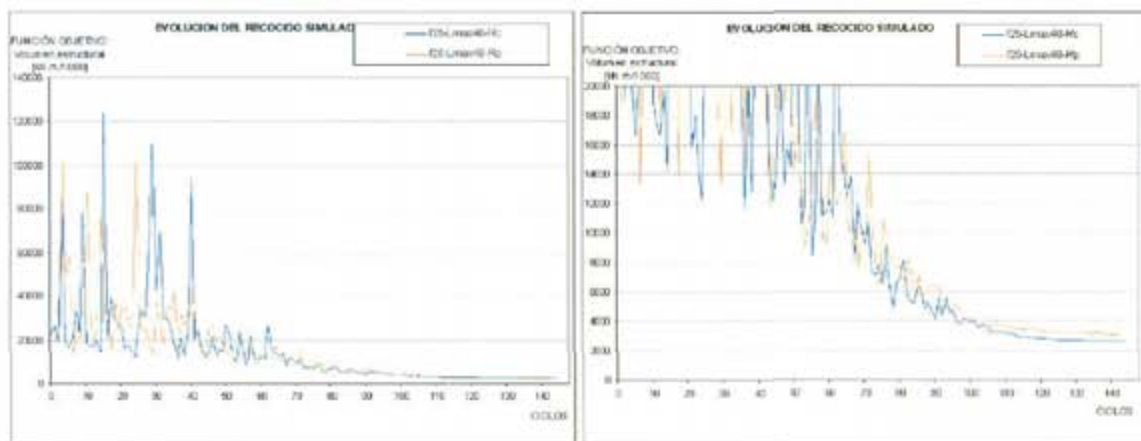


figura 3. 8: Evolución del recocido simulado

En el grafico de la izquierda se puede apreciar claramente como el proceso se ha detenido cuando no hay variaciones de la función objetivo, el proceso se ha estabilizado en una solución y ningún cambio se acepta.

Existen estudios más detallados, aportando la justificación matemática de la convergencia del algoritmo, como por ejemplo Yang (Yang, 2000), Lapume (Lapume *et alli*, 2000) estudia la convergencia en una aplicación particular del recocido simulado.



## Capítulo 4

### Teoría del diseño de estructuras

Con el fin de introducir ciertos conceptos que se utilizarán más adelante, en este capítulo se describen algunos aspectos de la teoría del Diseño de Estructuras. También se ve cómo encaja el problema de optimación de estructuras dentro de esta teoría. Estos conceptos no son nuevos, de hecho todos ellos ya están reflejados en la bibliografía de referencia, (Cervera, 2004; Cervera, 1993; Vázquez, 1994; Michell, 1904) que, a su vez, aportan una exposición más extensa de los mismos. Su recopilación en este punto ayuda a entender la aplicación de ciertas magnitudes a los problemas planteados en capítulos posteriores.

#### 4.1 Proyecto de Estructuras

La concepción y el proyecto de estructuras requiere usualmente de una *experiencia* en este campo. Gracias a ésta se puede acelerar el proceso de prueba y error sobre los posibles diseños. Dicho proceso no es lineal, así será importante establecer en las primeras fases los aspectos que tengan una mayor importancia o que supongan un mayor impacto en la determinación de la forma, progresivamente se podrá pasar a un trabajo de diseño más refinado e ir adquiriendo una mayor precisión.

En el proceso se ha de realizar una serie de comprobaciones del objeto o partes del mismo que permiten su validación frente a los requisitos a cumplir, incluyendo entre ellos los meramente estructurales (estabilidad, resistencia y rigidez), el uso, la durabilidad así como el *coste*.



Las teorías de análisis estructural permiten comprobar el objeto, sin necesidad de su construcción real, utilizando modelos teóricos, para ello el objeto a analizar debe estar muy definido. En esta etapa es muy útil el uso de los ordenadores, estos permiten la realización de las operaciones necesarias para tal comprobación rápidamente. El resultado de este análisis, sin embargo, no da información sobre las correcciones a realizar en el objeto, de ahí la importancia de la experiencia, que, por otra parte, sólo se puede adquirir enfrentándose a un alto número de estructuras, reales o virtuales.

Es deseable que en el proceso de diseño de una estructura ciertas decisiones, las que corresponden a los parámetros geométricos y topológicos fundamentales, puedan tomarse pronto con garantías de validez.

Dado que la mayor parte de las comprobaciones a que se someten los modelos en las fases iniciales de proyecto se basan en su definición geométrica, resulta de gran valor asegurar la idoneidad estructural a partir de parámetros geométricos: dimensiones, proporciones, tamaños, etc., de modo que las potentes decisiones iniciales tengan una importante garantía de validez posterior.

La Teoría del Diseño de Estructuras dentro de la teoría general de estructuras responde a sus propios objetivos e intenta racionalizar el proceso de diseño. Para ello trata de describir las cualidades estructurales más generales, reglas aplicables en la etapa previa a la definición y análisis de las mismas y que permitan llegar en el menor tiempo al menor coste posibles a soluciones razonables. Esta teoría se convierte así en una herramienta útil en las fases de concepción de la estructura, potenciando y pudiendo sustituir en algunos casos la experiencia del diseñador.

El capítulo anterior se introducía con la importancia que tiene la obtención de una estructura cuyo coste sea mínimo, además de las cuestiones meramente constructivas hay que considerar el coste propio del proceso de diseño. La teoría del diseño de estructuras ayuda a que éste segundo componente sea menor.

El averiguar la solución óptima para un problema concreto tienen un gran interés, no solo por conocer la solución en si misma, sino el estudio de soluciones óptimas para problemas similares, pues aporta las características generales que poseen este tipo de diseños con el fin de extraer unos parámetros geométricos que puedan ser

aplicables posteriormente a nuevos problemas de la misma categoría. Interesa un proceso que no sea ciego, que aporte información para detectar determinados parámetros en posiciones próximas o lejanas al óptimo, que permitan comparar aspectos globales.

## 4.2 La medida del consumo en estructura

En una definición sencilla de estructura Cervera (2004) dice: es el vehículo material que permite establecer un sistema de fuerzas en equilibrio, que permite poner en comunicación entre sí dichas fuerzas. Estas serán las cargas correspondientes a su propio peso añadidas a las derivadas del uso, que deben equilibrarse con las reacciones del terreno.

Existen múltiples soluciones estructurales para un mismo sistema con distintos consumos. Se puede medir el consumo en términos de consumo de materiales, de energías y productos no renovables o de esfuerzo humano, pero como primer paso se ha establecido su medida en función del consumo de material.

Interesa una magnitud que permita comparar estructuras con cierta independencia del material a emplear. Esa magnitud será el *volumen estructural* (o como se le denomina en algunos textos de la bibliografía de referencia cantidad de estructura). Pero antes de pasar a describirla hay que definir, aunque sea brevemente, algunos conceptos básicos.

En primer lugar un **Problema de Maxwell** es aquel que consiste en definir una estructura que materializa el equilibrio entre un sistema de fuerzas. La resultante del sistema es cero y, en él, tanto la magnitud como la posición de las fuerzas están definidas. Es un problema teórico, pues en la práctica la forma y la existencia de la estructura tienen una influencia considerable en la magnitud y posición de tales fuerzas.

Así una **Estructura de Maxwell** es aquella que resuelve un problema de Maxwell y que cumple una condición: Está constituida por elementos que trabajan uniaxialmente, en tracción o compresión.

Si esa estructura de Maxwell tiene un dimensionado estricto de cada punto, es decir, que en todas las secciones está sometido a la misma tensión, la máxima admisible

con seguridad, se denomina **Estructura Estricta**. En la realidad habrá que tener en cuenta otros requisitos en el dimensionado, como rigidez, estabilidad, así como dimensionados por catalogo, etc.

Es difícil, a priori, la aplicación a elementos en flexión o a estructuras cuyo comportamiento es biaxial o triaxial. En ese caso puede ser útil la asimilación a estructuras trianguladas mediante mallas de barras aisladas y así triangular superficies o tetraedrar volúmenes.

Así para una estructura estricta de Maxwell se puede definir una magnitud denominada *cantidad de estructura*,  $W$ , como la integral extendida a toda la estructura del producto de  $|N|$ , valor absoluto del esfuerzo axil en la sección, por  $ds$ , elemento longitudinal de la pieza en el punto considerado.

$$W = \int |N| \cdot ds \quad (4.1)$$

Esta magnitud mide simultáneamente fuerzas y recorrido y, como se verá más adelante, tiene una relación directa con el volumen de material consumido. Sus propiedades e independencia del material considerado la convierten en idónea para una exploración abstracta sobre las propiedades estructurales ligadas a la forma.

Para estructuras de barras de dimensionado estricto con  $e$  elementos de longitud  $L_e$  y que soportan un axil  $N_e$  la cantidad de estructura queda como sigue:

$$W = \sum_{i=1}^e |N_i| L_i \quad (4.2)$$

Se trata de una magnitud con dimensiones de trabajo.

### 4.3 Volumen estructural y relación con otras magnitudes

En una estructura estricta la cantidad de estructura es proporcional al volumen de material. Sea un material de comportamiento simétrico en tracción y compresión cuya tensión de trabajo sea  $f$ . Para un dimensionado estricto, en el que se ignora la inestabilidad por pandeo de las barras comprimidas, el área de cada sección será:

$$A = \frac{|N|}{f} \quad (4.3)$$

Y el volumen de material de toda la estructura de  $e$  barras:

$$V_m = \sum_{i=1}^e A \cdot L = \sum_{i=1}^e \frac{|N_i|}{f} \cdot L_i = \frac{W}{f} \quad (4.4)$$

Por lo tanto es proporcional, tanto si la tensión es constante como si se considera un valor medio ponderado, (en caso de ser un material de diferente comportamiento a tracción y a compresión).

De este modo en una estructura estricta el volumen del material es directamente la cantidad de estructura dividido por la tensión de servicio.

Si no se puede asegurar idéntica tensión en todos los puntos, el volumen de material será mayor a dicho cociente.

Para una estructura que no sea de Maxwell o no sea estricta, Vázquez (1994) define el *volumen estructural*, magnitud proporcional al peso de la estructura, así partiendo del peso, que es la suma extendida a todas las barras del producto del área,  $A$ , por la longitud de cada barra,  $L$ , por el peso específico del material,  $\rho$ .

$$P = \sum_{i=1}^e \rho_i \cdot A_i \cdot L_i \quad (4.5)$$

Si todas las barras son del mismo material, algo muy habitual, el peso específico es un valor común.

$$P = \rho \cdot V \quad \text{por lo tanto:} \quad V = P / \rho \quad (4.6)$$

En el dimensionado de cada barra, tal y como se ha indicado en la fórmula 4.3:

$$V = A \cdot L \geq \frac{|N|}{f} L \quad V \cdot f \geq |N| \cdot L \quad (4.7)$$

Con esta magnitud se pueden comparar soluciones de un mismo problema con materiales distintos, cuantificado por su tensión segura  $f$ .

Así el volumen estructural queda:

$$V_s = V \cdot f \geq \sum_{i=1}^e |N_i| \cdot L_i = W \quad (4.8)$$

La diferencia entre *cantidad de estructura* y *volumen estructural* radica en que para la primera se cumplen las condiciones de ser una estructura de Maxwell y estricta, y en el segundo no tiene que ser así. De hecho para una estructura estricta de Maxwell ambas magnitudes son iguales,  $V_s=W$ , pero en caso de no ser estricta  $V_s \geq W$ . Así el cociente entre ambas magnitudes,  $W / V_s$ , es una medida de la eficacia en el aprovechamiento de la resistencia del material empleado.

En los ejemplos que se exponen en los próximos capítulos, se ha empleado el volumen estructural como magnitud a optimizar. En ninguno de los casos se trata de problemas de Maxwell como se verá, en las láminas la posición de las cargas cambia acompañando al nudo.

#### 4.4 Cantidad de estructura traccionada y comprimida

Puede ser interesante para problemas en los que el material no tenga el mismo comportamiento a compresión que a tracción, o si se emplea materiales diferentes según su sollicitación, el desglose de la cantidad de estructura en dos, la correspondiente a los elementos comprimidos por una parte y a los traccionados por otra.

Denominando  $N^+$  y  $N^-$  a las sollicitaciones de tracción y compresión respectivamente, en valor absoluto, la cantidad de estructura total será:

$$W^+ = \int |N^+| \cdot ds \quad W^- = \int |N^-| \cdot ds \quad (4.9)$$

$$W = \int |N| \cdot ds = \int |N^+| \cdot ds + \int |N^-| \cdot ds = W^+ + W^-$$

Esta distribución también permite realizar afirmaciones muy generales sobre estructuras que resuelven el mismo problema de Maxwell, pero al no ser este el caso de los problemas de esta tesis, no se profundizará en ello.

#### 4.5 Cantidad de estructura horizontal y vertical

En numerosos problemas estructurales la carga gravitatoria es una de las de máxima relevancia, por tanto, tiene sentido considerar una nueva división de la cantidad de estructura, la que puede contabilizarse en traslados horizontales de carga, y la contenida en traslados verticales de carga. Suponemos estructuras, planas o

tridimensionales, realizadas mediante barras sometidas a esfuerzos axiles, en las que las barras pueden tener cualquier orientación en el espacio. La cantidad de estructura puede medirse con:

$$W = \int |N| dl = \int |N \cdot dl| = \int (|N_x dx + N_y dy + N_z dz|) \quad (4.10)$$

$$W = \int |N_x| dx + \int |N_y| dy + \int |N_z| dz$$

Lo que es admisible dado que los esfuerzos  $N$  y las longitudes  $dl$  de las barras están alineadas, por lo que los signos de sus tres componentes son simultáneamente iguales si la barra está traccionada, o simultáneamente opuestos si está comprimida.

Se llama cantidad de estructura vertical  $W^{\parallel}$  a la parte vertical de dicha expresión:

$$W^{\parallel} = \int |N_z| dz \quad (4.11)$$

y cantidad de estructura horizontal  $W^{\perp}$  a la parte horizontal de la misma.

$$W^{\perp} = \int |N_x| dx + \int |N_y| dy \quad (4.12)$$

Si la estructura es de barras de dimensión finita, las expresiones serán las sumas:

$$W^{\parallel} = \sum |N_{iz}| L_{iz} \quad (4.13)$$

$$W^{\perp} = \sum |N_{ix}| L_{ix} + \sum |N_{iy}| L_{iy}$$

#### 4.6 Caracterización de las soluciones óptimas

No hay un método general de obtención de soluciones óptimas para un problema de Maxwell dado, sin embargo sí se puede verificar si una solución dada es o no óptima, a partir de las afirmaciones del siguiente teorema (Michell, 1904):

*Una estructura estricta alcanza el límite de economía, es mínima, si el espacio en el que está situada puede ser sometido a una deformación, virtual, tal que los alargamientos o acortamientos unitarios se incrementan igualmente en todas las piezas, con el mismo valor, y en el signo de la deformación original, y en valor no menor que el cambio unitario de longitud de cualquier elemento del espacio considerado.*

*Si el espacio considerado se extiende al infinito en todas las direcciones, el volumen de tal estructura es mínimo con relación a todos los posibles diseños, y en caso*

*contrario mínimo en relación a los diseños que pueden considerarse incluidos en el mismo contorno finito.*

El teorema enunciado es de difícil comprensión, se torna inteligible cuando se recorre el proceso de demostración, que no se reproduce en este texto., se puede consultar la demostración completa en el texto original y en (Cervera, 2004) el proceso general de la misma.

A modo de resumen se podría decir que para caracterizar a una estructura de mínima, mediante el Teorema de Michell, exige que pueda confrontarse con una deformación test cuyas direcciones principales coincidan en todas partes con las deformaciones de las barras y con el signo de los esfuerzos de éstas, y cuyos valores principales sean constantes en todo el ámbito de la estructura, en valor absoluto, y mayores o iguales a las deformaciones principales del resto del espacio considerado.

Las estructuras que pueden ser sometidas con éxito a una deformación test tipo citado, Michell presenta dos subclases:

1. Las estructuras sometidas a esfuerzos de igual signo en todas sus barras, solo tracción o solo compresión. Para éstas la deformación test es una contracción o una dilatación uniforme del espacio.
2. Las estructuras formadas por barras en direcciones ortogonales antes y después de la deformación, para las que la deformación test es igual en valor, y de igual u opuesto signo en tales direcciones.

El Teorema de Michell tiene gran importancia, puesto que permite establecer un método de prueba para garantizar si una estructura es o no óptima para un problema dado. Pese a que no ofrece una guía definitiva en la búsqueda de soluciones óptimas, tiene, sin embargo, un gran valor heurístico en la misma. En efecto, puesto que en la solución óptima, y estricta, la deformación real y la deformación test coinciden, salvo un factor de escala, los óptimos corresponderán a situaciones en las que las direcciones de las barras coincidan con aquellas que producen las máximas deformaciones, considerando la deformación de todo el espacio que acompaña a la estructura. De este modo existe una guía para la modificación en posición de las barras. Por otro lado, dado que en estructuras planas el estado de deformación, test o no, del espacio considerado es

en todos sus puntos un estado plano, es inmediato comprobar que las direcciones de máxima tracción y máxima compresión corresponderán a las direcciones principales de dicho estado en el punto considerado, y siendo éstas ortogonales entre sí se deduce que la situación óptima de encuentro entre barras sometidas a esfuerzo de distinto signo es la que se produce con ángulos de  $90^\circ$ . Esto implica que en todos los puntos de aplicación de cargas la solución óptima contendrá, bien una barra en la dirección de la carga, bien dos barras que, o contienen la dirección de la carga en el ángulo que forman entre si, y en este caso la deformación test local debe ser uniforme en todas direcciones, de tracción o compresión, o si no es así deberán encontrarse en dicho punto de aplicación formando un ángulo recto, y trabajando con signos opuestos.

Los trazados óptimos de Michell para determinados sistemas de fuerzas son:

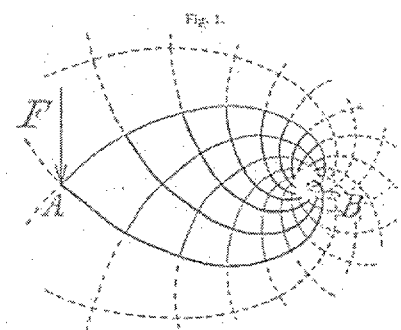


figura 4. 1: Una única carga aplicada en el extremo A de la línea AB, y las reacciones correspondientes a un empotramiento, fuerza y momento, en B.



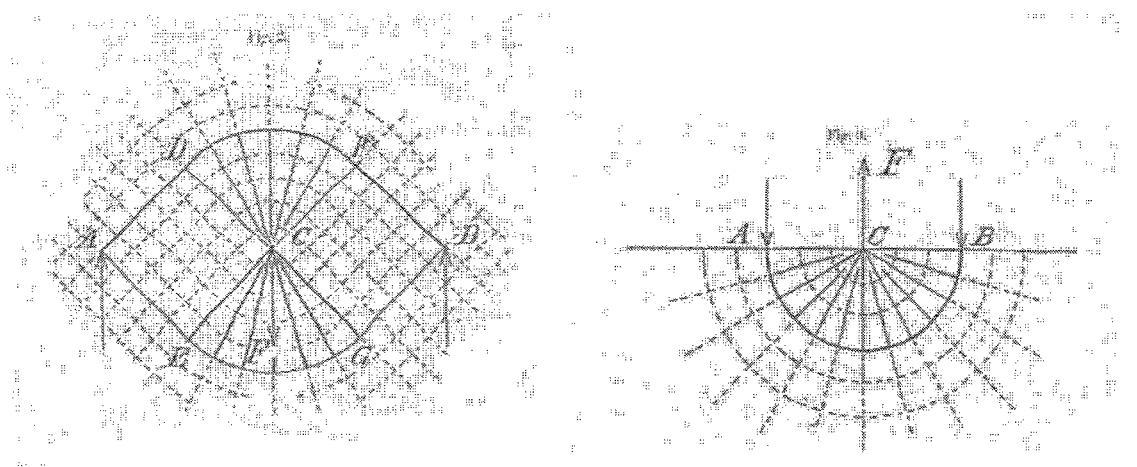


figura 4. 2: Estructura biapoyada en A y B, con una única carga puntual entrada, aplicada en C, en la figura de la derecha la solución está restringida al espacio a solo un lado de la línea AB.

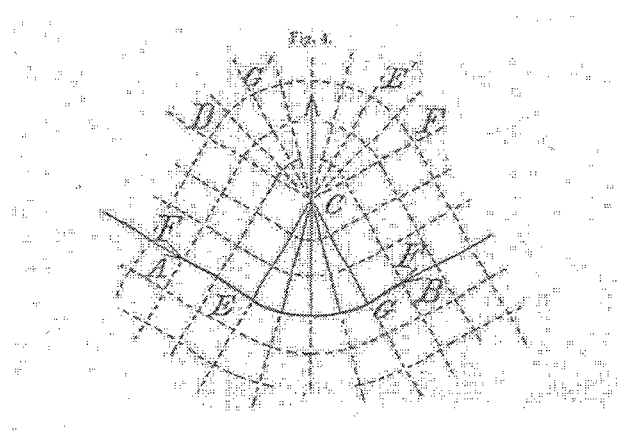


figura 4. 3: El entramado mínimo de tres fuerzas, concurrentes en un punto y dos de las cuales son de igual magnitud.

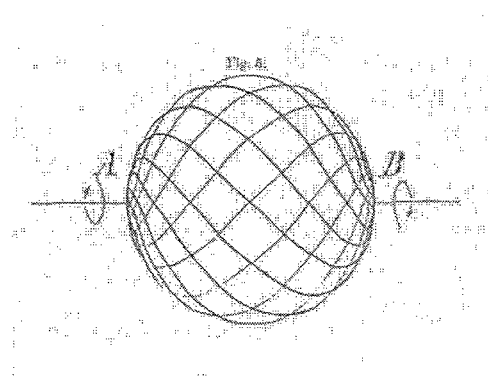


figura 4. 4: Dos momentos iguales de sentido contrario aplicados en los extremos de la recta AB.

A estos campos de deformación (Cervera, 2004) añade un nuevo trazado óptimo para el caso de tres fuerzas concurrentes en un punto, en este caso las fuerzas no son de igual módulo.

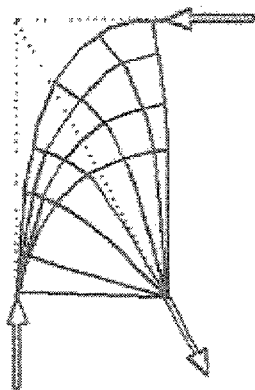


figura 4. 5: Trazado óptimo (Cervera, 2004: 128)

4.6.1 Relaciones

Dada una estructura, la cantidad de estructura total será la suma de la correspondiente a traslados de carga en horizontal más los traslados en vertical:  $W=W^{\perp}+W^{\parallel}$ , dónde los términos que forman parte de esta expresión están detallados en las fórmulas (4.13).

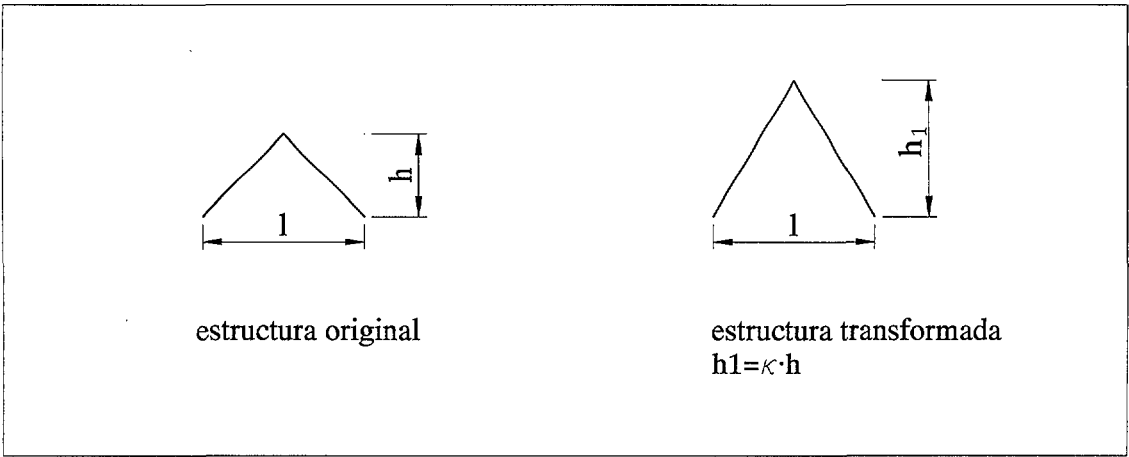


figura 4. 6: Transformación afín.

Si se realiza una transformación afín, mediante la cual se cambia en canto de la misma como se muestra en la figura 4. 6, la cantidad de estructura horizontal y vertical de la estructura transformada en relación a la inicial es la siguiente, donde  $\kappa$  es el factor de proporción entre los cantos o las esbelteces:

$$W^{\perp}_I = 1/\kappa \cdot W^{\perp} \quad W^{\parallel}_I = \kappa \cdot W^{\parallel}$$

De donde se deduce que la relación  $W^{\perp} \cdot W^{\parallel}$  es constante, o lo que es lo mismo  $W^{\perp} \cdot W^{\parallel} = W^{\perp}_I \cdot W^{\parallel}_I$ . El óptimo se da cuando la cantidad de estructura horizontal es igual a la vertical  $W^{\perp}_I = W^{\parallel}_I$ , por lo que en ese caso también sería cierto que  $W^{\perp}_I = \kappa \cdot W^{\parallel}$ . Si se quiere conocer cual es el factor  $\kappa$ , por el que hay que multiplicar el canto y hacer esa transformación afín, para obtener el óptimo se puede operar con las anteriores ecuaciones llegando a:

$$\kappa = \sqrt{\frac{W^{\perp}}{W^{\parallel}}} = \sqrt{\frac{W^{\perp 2}}{W^{\parallel} W^{\perp}}} = \frac{W^{\perp}}{\sqrt{W^{\perp} W^{\parallel}}} \quad (4. 14)$$

Siendo el término del denominador de la última expresión una constante. Estas relaciones se aplicarán a los resultados que se obtengan en capítulos posteriores.

## Capítulo 5

### Optimación de láminas

En el capítulo que aquí comienza, se presenta el problema de la búsqueda de óptimos en láminas. El propósito es encontrar la configuración de geometría y topología que hagan el peso de la lámina tan pequeño como sea posible. Se comenzará con la descripción del objeto y del planteamiento del problema; se pasará por los procedimientos necesarios para su desarrollo, y se finalizará con la exposición de las soluciones encontradas.

Para llevar a cabo este propósito se ha construido un programa que emplea el recocido simulado, algoritmo que se ha expuesto en capítulos precedentes.

El problema de búsqueda de formas en láminas no es original en el campo de la optimización de estructuras, de hecho se ha experimentado en este sentido con modelos físicos, como se ha visto en el Capítulo 2, o mediante algoritmos de optimización, empleando con gran frecuencia el análisis de sensibilidad (Ansola *et alli*, 2002; Choi, 2000; Ohmori & Yamamoto, 1998; Ramm, 1992, Ramm *et alli*, 1993 y Bletzinger *et alli*, 1996). Lo más parecido aparece en Vázquez (1994) mediante la aplicación del recocido simulado a la optimización de cúpulas de revolución con carga vertical.

#### 5.1 Definición del objeto

El objeto de diseño consiste en una lámina reticulada, de una sola capa. Su forma queda definida por su geometría, **g**, y topología, **t**, sobre las que se producirán cambios, de forma aleatoria, para llevar a cabo el propósito del problema.

La geometría queda determinada por  $\mathbf{g}(n)=\{(x_1,y_1,z_1),\dots,(x_n,y_n,z_n)\}$ , que representa las coordenadas en el espacio de los  $n$  nodos y varía dentro de  $\mathbf{G}$ , todas las posibles coordenadas de  $n$  nodos en una región previamente definida, ( $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ ). El número total de nudos,  $n$ , permanece constante a lo largo de todo el proceso.

La topología del esquema estructural define el modo en que los nodos están conectados unos a otros, se puede expresar de dos maneras, como el conjunto de barras que unen los nodos dos a dos,  $\mathbf{t}(e)$ , o como el conjunto de superelementos formados por un nodo y todos aquellos a los que este está conectado mediante una barra,  $\mathbf{t}(s)$ . En este caso los nodos estarán ordenados siguiendo el sentido levógiro en su proyección en planta visto desde arriba. Ambos definen una misma topología.

$$\mathbf{t}(e) = \{(n_{i1}, n_{1j}), \dots, (n_{ei}, n_{ej})\} \quad \mathbf{t}(s) = \{(n_1, n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1i}), \dots, (n_n, n_{n1}, n_{n2}, \dots, n_{nj})\}$$

Donde  $e$  es el número de barras entre los  $E$  elementos posibles, o lo que es lo mismo todas las posibles combinaciones de dos nodos, ( $E=n(n-1)/2$ ,  $e \in [1, E]$ , con  $e$  y  $E \in \mathbb{N}$ ). El número de superelementos coincide con el numero de nodos,  $n$ .

Cualquiera de las dos expresiones de topología varían dentro del conjunto de todas las topologías posibles, ( $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ ).

Esta doble definición de la topología será necesaria en algunos cálculos realizados durante el proceso, como el cálculo de las cargas que recibe cada nudo o la generación de cambios.

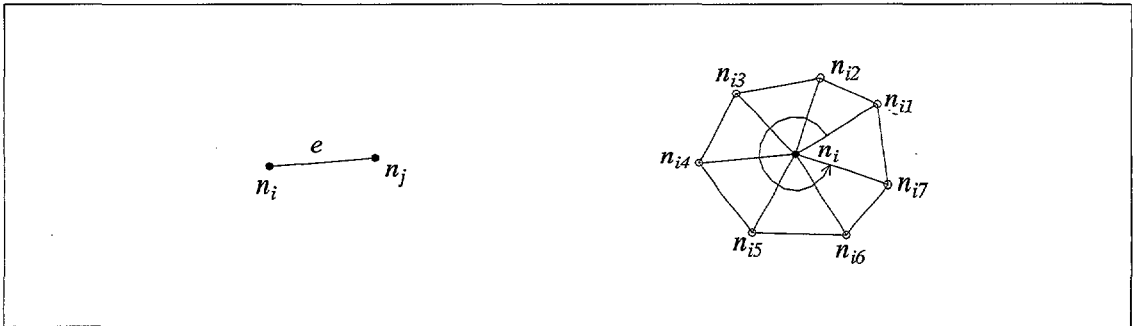


figura 5. 1: Topología: elemento,  $e$ , definido por  $(n_i, n_j)$  y el superelemento,  $s$ , por  $(n_i, n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ij})$ .

Los  $n$  nudos que definen la geometría se dividen en dos grandes grupos, aquellos cuya posición permanece fija durante todo el proceso y los que cambian. Los nudos fijos,  $n_f$ , tienen al menos, una biela de sustentación vertical,  $\delta_z$ . Además, para garantizar

que no se produce un movimiento como sólido rígido de la estructura, tiene que haber, al menos, tres bielas de sustentación horizontal en los ejes X e Y, adecuadamente situadas, de forma que no sean concurrentes en un punto, en cualquiera de esos nodos, ( $n_f \geq 3$ ). En el problema aquí planteado, sólo se tomarán en consideración las láminas que sean internamente isostáticas, es decir que pueden ser hiperestáticas por sustentación, aunque se procurará que sen las menos posibles. Denominando  $b$  al número de bielas de sustentación de la estructura, una estructura isostática debe cumplir la relación  $3n=e+b$ . Para que sea una solución posible, o aceptable, se debe cumplir al menos  $3n \leq e+b$ , esto sólo se dará aumentando los vínculos exteriores, es decir, que será internamente isostática.

El conjunto de vínculos queda definido de la siguiente manera:  $\mathbf{v} = \{(n_1, \delta_x), (n_1, \delta_y), (n_1, \delta_z), \dots, (n_f, \delta_x), (n_f, \delta_y), (n_f, \delta_z)\}$ , donde cada par consta del numero del nodo al que se le aplica la coacción y de la dirección de la coacción. En este conjunto aparecen todos los nudos fijos al menos una vez.

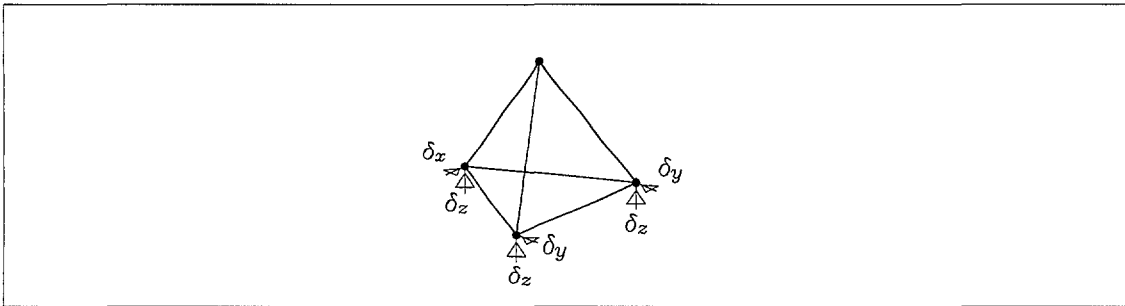


figura 5. 2: Condiciones de apoyo:  
condiciones mínimas de sustentación para una lámina de 4 nudos.

El segundo tipo, los nudos variables, se dividen a su vez en dos subgrupos, el de nudos de contorno libre y los nudos interiores. Estos dos tipos se caracterizan por no tener ninguna coacción a su desplazamiento, (sin vínculos), y se diferencian entre si, únicamente, por ser, los primeros, nudos que marcan el límite de la estructura.

Ambos definen el subconjunto de nudos variables  $\mathbf{g}(n_v) = \{(x_{f+1}, y_{f+1}, z_{f+1}) \dots (x_n, y_n, z_n)\}$ , con un total de  $n-n_f$  nudos, ( $\mathbf{g}(n_v) \in \mathbf{g}(n)$ ).

### 5.1.1 Aplicación de cargas

La carga que debe soportar la lámina se define por unidad de superficie y está aplicada en la dirección del eje vertical, Z. La carga se reparte de manera que todos los nudos tienen una carga puntual,  $q(i)$ , ya sean nudos interiores, de contorno o apoyados. El valor de  $q(i)$  está calculado en función de la superficie de los triángulos que acometen en él, en proyección horizontal, y del valor de la carga por unidad de superficie,  $q$ .

La razón de esta estrategia es que la carga no está asociada a la superficie de la lámina, sino a la superficie en proyección horizontal. El problema así está asociado a la clásica representación de la carga de nieve, y permite comparar formas con cargas *semejantes*. Quedan así fuera versiones importantes del problema, como la consideración de la acción del viento.

Atendiendo a la topología que se muestra en la figura 5. 1, la carga que recibe el nudo  $n_i$ , nudo interior al que acometen 7 barras será:

$$q(i) = \frac{1}{3} \left( \sum_{j=1}^{j=7} \text{area}(n_i, n_{ij}, n_{ij+1}) + \text{area}(n_i, n_{i7}, n_{i1}) \right) \cdot q$$

Siendo la función *area*, el área en proyección horizontal del triángulo definido por los tres puntos indicados.

### 5.1.2 Análisis y dimensionado

Se opta por triangular la superficie de la lámina por medio de barras, en una sola capa. Estas estarán solicitadas en la dirección de su eje, por esfuerzos de tracción o compresión, pues tan solo se considera su rigidez ante esfuerzos axiales.

Para el análisis de la estructura se ha recurrido al método matricial de equilibrio (Quintas, 1995). Partiendo de tres grados de libertad por nudo, (los desplazamientos en los tres ejes coordenados), se construyen las matrices de rigidez de cada barra:

$$\begin{bmatrix} N_{1x} \\ N_{1y} \\ N_{1z} \\ N_{2x} \\ N_{2y} \\ N_{2z} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_x & \cos \alpha_x \cos \alpha_y & \cos \alpha_x \cos \alpha_z & -\cos^2 \alpha_x & -\cos \alpha_x \cos \alpha_y & -\cos \alpha_x \cos \alpha_z \\ \cos \alpha_x \cos \alpha_y & \cos^2 \alpha_y & \cos \alpha_y \cos \alpha_z & -\cos \alpha_x \cos \alpha_y & -\cos^2 \alpha_y & -\cos \alpha_y \cos \alpha_z \\ \cos \alpha_x \cos \alpha_z & \cos \alpha_y \cos \alpha_z & \cos^2 \alpha_z & -\cos \alpha_x \cos \alpha_z & -\cos \alpha_y \cos \alpha_z & -\cos^2 \alpha_z \\ -\cos^2 \alpha_x & -\cos \alpha_x \cos \alpha_y & -\cos \alpha_x \cos \alpha_z & \cos^2 \alpha_x & \cos \alpha_x \cos \alpha_y & \cos \alpha_x \cos \alpha_z \\ -\cos \alpha_x \cos \alpha_y & -\cos^2 \alpha_y & -\cos \alpha_y \cos \alpha_z & \cos \alpha_x \cos \alpha_y & \cos^2 \alpha_y & \cos \alpha_y \cos \alpha_z \\ -\cos \alpha_x \cos \alpha_z & -\cos \alpha_y \cos \alpha_z & -\cos^2 \alpha_z & \cos \alpha_x \cos \alpha_z & \cos \alpha_y \cos \alpha_z & \cos^2 \alpha_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \end{bmatrix}$$

Cuando la estructura es interna y externamente isostática, el dimensionado puede determinarse después del análisis, en función del axil de cada barra y de la tensión admisible con seguridad,  $f$ , del material. Cuando sólo es internamente isostática para el análisis se han considerado todas las barras de igual sección, el dimensionado definitivo se hace tras el análisis como en el caso anterior.

El dimensionado,  $\mathbf{d}$ , viene determinado por  $\mathbf{d}(e) = \{A_1, \dots, A_e\}$ , siendo  $A_i$  el área de la sección del elemento  $i$ , ( $i=1, \dots, e$ ). Cada uno de los valores  $A_i$  puede corresponder a un dimensionado estricto o pertenecer a un conjunto de secciones de catálogo, conjunto finito de parejas de áreas y radios de giro. En los ejemplos que se muestran al final de este capítulo, sólo se ha empleado el dimensionado estricto, en este caso las áreas,  $A_i$ , se obtienen después del análisis. Las barras traccionadas o comprimidas se consideran fenómenos equivalentes, en la realidad esto no es cierto debido a la inestabilidad por pandeo en las barras comprimidas, por lo que las soluciones obtenidas de esta manera son teóricas.

## 5.2 Formulación general del problema de diseño.

Los grados de libertad de una configuración se puede expresar como  $\mathbf{x}$ , con  $\mathbf{x} = \{\mathbf{g}, \mathbf{t}\} \in \{\mathbf{G}, \mathbf{T}\}$ , donde  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{T}$  son los conjuntos de todas las posibles geometrías y topologías respectivamente. Cada conjunto  $\mathbf{x}$ , corresponde con una solución, que para que sea válida debe estar contenida dentro del dominio búsqueda,  $\mathbf{X}$ , sobre el que se tratará con más profundidad en el apartado 5.3.

En consecuencia, el problema de optimación se puede expresar según la fórmula (3.3):

Encontrar  $\mathbf{x}_0$ , tal que:

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} (f(\mathbf{x})) \quad (5.1)$$



Esto es, encontrar la configuración de geometría y topología que hacen mínimo el valor de la función objetivo, dentro del dominio de búsqueda.

La función objetivo clásica para este problema es el peso de la estructura, pero como se vio en un capítulo anterior se utilizará el *volumen estructural*  $V_s$ , que es proporcional al peso con ciertas condiciones que se cumplen en este caso.

El problema de optimar el objeto anteriormente descrito no resuelve el mismo problema de Maxwell<sup>viii</sup> tal y como se describe en la teoría del diseño de estructuras, pues para ello las cargas deberían tener un punto de aplicación definido y fijo durante todo el proceso. En este caso se ha optado por hacer que la carga acompañe al nodo sobre el que se aplica, así la carga cambia tanto de posición como de magnitud, pues ésta última depende del área de los triángulos contiguos al nodo.

Las razones para hacer esto es evitar que al situar unos puntos fijos en el espacio con la carga aplicada, esto influya en la configuración general de la solución, sobre todo debido a que se trata de láminas de una sola capa.

### 5.3 Dominio de búsqueda.

El espacio de búsqueda,  $\mathbf{X}$ , donde debe buscarse cada solución,  $\mathbf{x}$ , está constituido por todas las láminas reticuladas con  $n$  nudos, con los vínculos aplicados en los nudos fijos, de número  $n_f$  ( $n \geq n_f$ ) y que a su vez cumple las siguientes restricciones del problema:

Los nudos variables pueden cambiar su posición dentro de un recinto, que se define para cada problema. Éste queda determinado por las coordenadas de dos puntos que marcan unos límites inferior y superior de la lista  $\{ (x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}) \}$ . Una limitación muy común, como se verá en ejemplos posteriores consiste en hacer  $z_{\min} = 0$ , siendo  $z=0$  la cota de los apoyos, así se eliminan las soluciones de membrana colgada trabajando fundamentalmente a tracción, estas soluciones

---

<sup>viii</sup> Definido en el capítulo 4, aquí se recuerda que un problema de Maxwell consiste en definir una estructura capaz de poner en equilibrio entre sí a las fuerzas de un sistema tal que tanto la posición como la magnitud de las mismas están definidas.

posteriormente se denominarán de *recinto positivo*. De la misma manera se puede referir a recinto negativo al conjunto los puntos del espacio que cumplen que su cota  $z \leq 0$ .

### 5.3.1 Requisitos estructurales

Como se ha visto, al tratarse de estructuras isostáticas, las barras se pueden dimensionar en función de su sollicitación después del análisis. Por lo tanto la condición de resistencia siempre se cumple, y no es necesaria la optimación del área de las barras.

La condición de rigidez suficiente, eliminará aquellas posibles soluciones que superen la deformación máxima admisible;  $u_z \leq u_{\max}$ . Si la condición de rigidez no se satisface, será suficiente con aumentar el área de los elementos proporcionalmente en un factor,  $u_i/u_{\max} \geq 1$ , pero entonces el dimensionado ya no es estricto.

Teniendo en cuenta los apoyos elegidos y el ámbito de variación de la estructura, se considera que la estabilidad general siempre se va a cumplir,. Sin embargo en relación a la condición de estabilidad local, no se ha considerado el pandeo de las barras comprimidas, esto hace que las soluciones encontradas solo sean válidas desde un punto de vista teórico.

### 5.3.2 Requisitos geométricos y topológicos.

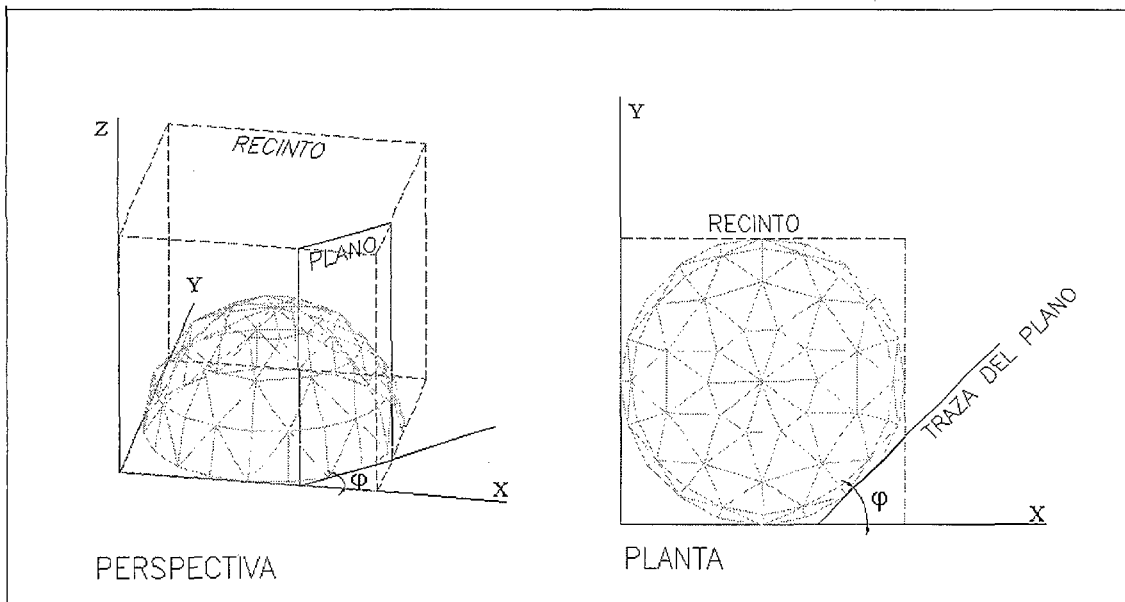


figura 5. 3: Plano para nudos de contorno

Cada nudo de contorno libre puede cambiar su posición dentro de un plano que le contiene, paralelo al eje Z. El plano se define por el ángulo  $\varphi$  y por las coordenadas de un punto. El ángulo  $\varphi$  es el que forma la traza del plano con el plano XY, y el eje X. Para no añadir mayor complejidad se ha elegido las coordenadas del propio nudo, así, aunque el nudo se mueve, al hacerlo dentro del plano, y la definición del mismo cambie, el plano siempre es el mismo, (figura 5. 3). De esta forma la coordenada  $z$  del punto puede cambiar libremente, mientras que las coordenadas  $x$  e  $y$  están siempre relacionadas mediante el ángulo  $\varphi$ .

Los ángulos tomarán valores positivos y menores a  $\pi$  expresado en radianes,  $\varphi \in [0, \pi)$ . Si no se aplicase esta restricción, los nudos de contorno libre podrían moverse a cualquier punto del espacio, siendo más favorable aquellas posiciones que reduzcan carga (lo más inmediato sería reducir la superficie) o que reduzcan la distancia al apoyo.

Los nudos interiores pueden cambiar su posición a cualquier punto dentro del recinto definido.

En los primeros tanteos con el programa se observó la tendencia a soslayar el problema de flexión, lo más efectivo para que una estructura consuma menos material parece ser no hacer estructura, así se observaba como las soluciones tendían a situar los nodos con su carga muy cercanos a los apoyos de forma que resolvía el problema mediante la compresión de barras cortas que unían el punto de aplicación de las cargas con los apoyos directamente y barras largas que apenas trabajaban uniando diferentes puntos entre sí, es decir, la solución eran unos pequeños soportes. Para evitar esto se creo una rutina que chequease que la longitud de las barras no fuese mayor que un valor determinado,  $l_{max}$ .

No se acepta el que dos barras de la solución se intersequen fuera de un nodo. Para escapar de estructuras de más de una capa, se chequea que la proyección horizontal de las barras(plano XY) no se crucen entre si en ningún punto salvo en los nudos. Esta cuestión en cuanto a topología es análoga a lo que sucedía en la optimación de cerchas estudiado por Vázquez (1994), lo que para las láminas es una proyección en el plano

horizontal para las cerchas era su propio plano. Lo que es un problema idéntico desde el punto de vista topológico no lo es en la geometría.

La condición anterior no impide que existan barras que sean coincidentes en su proyección, de nuevo se encuentra la tendencia del programa a buscar en una línea que no es la intención de esta investigación, el de las estructuras de más de una capa, para evitarlo se comprueba que las barras coincidentes en un nudo no tengan la misma proyección horizontal.

En una estructura espacial y reticulada, en la que solo se consideran los esfuerzos axiales, cualquier nodo que conectase tres barras podría ser eliminado sin cambiar la estabilidad del sistema (Wester, 1997), este sería el caso de un nudo variable sin carga exterior aplicada, (nudos superfluos), obteniéndose así una estructura con un nudo menos y con igual o menor volumen estructural. En este caso nunca existen nudos superfluos pues todos ellos reciben carga, además no se contempla el cambio de número de nudos durante el proceso.

Durante todo el proceso el número de nudos permanece constante, de esta manera se reduce los grandes tiempos necesarios para el recocido, facilitando el desarrollo de los ejemplos planteados con los medios informáticos disponibles.

En conclusión, queda reducido el espacio de búsqueda a las láminas reticuladas isostáticas y aceptables con los criterios expuestos.

#### **5.4 Mecanismo de generación de láminas**

Como se ha visto, el recocido simulado parte de una solución inicial, sobre la que se van produciendo cambios al azar. En problemas de optimación tan conocidos como el viajante de comercio, o en simulaciones termodinámicas, los parámetros que definen la configuración normalmente son homogéneos aunque numerosos. No sucede así en el problema de optimación de estructuras donde intervienen diferentes tipos de parámetros de la función objetivo. Ya Vázquez (1994) presentaba un nuevo rasgo del recocido simulado con la optimación de cerchas: heterogeneidad de parámetros definidos en la función que se va a optimar. En consecuencia, se necesita diseñar un mecanismo de generación específico a cada categoría de variables.

El mecanismo por el que se generan láminas alternativas necesita por una parte de los algoritmos que provocan transiciones, de un sistema al siguiente, que se describen en el apartado 5.4.1, y por otra hay que decidir la manera en que estos se aplican. Este segundo aspecto, la frecuencia relativa con que se va a utilizar cada generador se describe en el apartado 5.4.2.

### 5.4.1 Generador de alternativas

Con el generador de alternativas se pretende asegurar que con un número finito de jugadas exista una probabilidad no nula de que una lámina pueda transformarse en cualquier otra. Cada transformación produce una variación de la lámina relativamente pequeña.

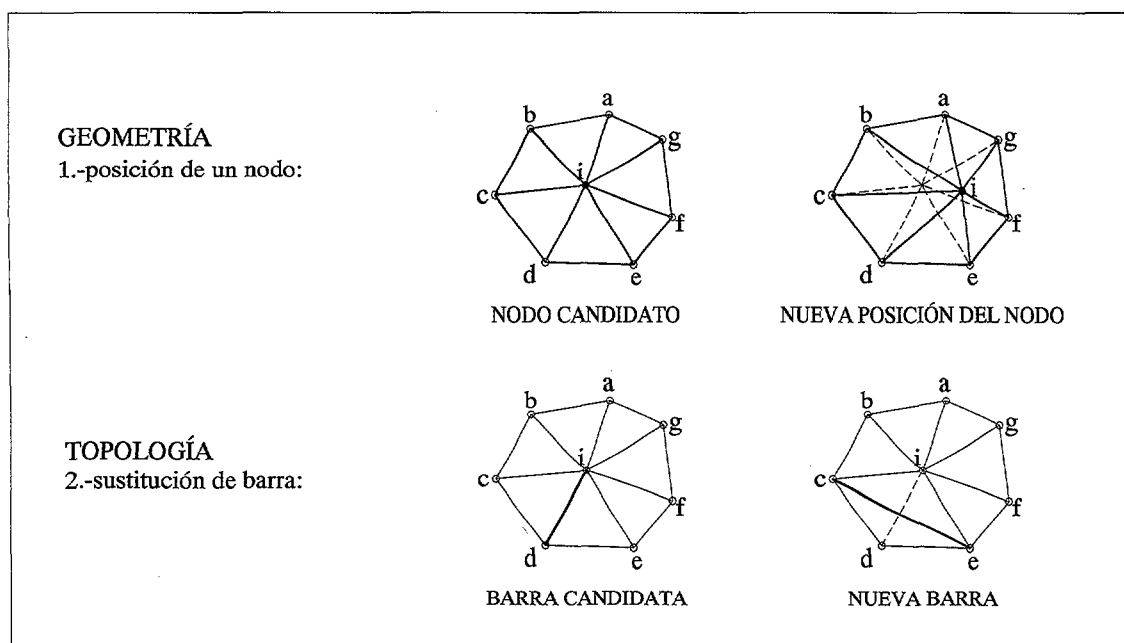


figura 5. 4: Jugadas del generador de alternativas.

Para transformar la lámina actual en la siguiente de forma aleatoria se hace mediante dos procedimientos (figura 5. 4) que modifican la geometría y topología. El

primero cambia la posición de un nodo; el segundo modifica la topología cambiando una barra por otra.

1. cambio de posición de un nudo.
2. cambio de una barra por otra.

Con estas dos sencillas operaciones se cambia la geometría (1) y la topología (2) y se asegura que cualquier forma es reducible a cualquier otra que cumpla con las condiciones del problema. Son transformaciones que al actuar sobre una estructura dada isostática, la transforma en otra que sigue siendo isostática, por lo tanto a lo largo de todo el proceso se mantiene la misma relación  $3n \leq e + b$ .

Explicando brevemente en funcionamiento de cada uno de ellos:

1) cambio en la posición de un nudo: se elige un nudo al azar, cambia sus coordenadas a una nueva posición aleatoria, si la nueva geometría no es aceptable, se repite el proceso hasta un número máximo de intentos. Si el nudo es interior la nueva posición se determina libremente, sin embargo, si el nudo es de contorno libre, solo se puede mover dentro de un plano, dato del problema. En ambos casos, para determinar la nueva posición, se buscará dentro de un prisma de lado  $ilg \cdot d$ , siendo  $ilg$  un valor real determinado previamente entre 0 y 1, y  $d$  el lado menor del prisma que define el recinto.

2) cambio de la posición de una barra o, lo que es lo mismo, una barra por otra. Se elige una barra de la solución, si ninguno de sus nudos esta hiperconectado, la barra no puede alterarse, por lo que habría que elegir otra barra hasta un máximo de intentos. Una vez elegida, se elige aleatoriamente una barra sustituta lo que exige que si la candidata solo tiene un nudo hiperconectado, la sustituta tenga también ese nudo (si la candidata tiene ambos nudos hiperconectados cualquier sustituta vale).

La combinación de estos mecanismos de generación constituye lo único necesario para el recocido. Todas las nuevas configuraciones se aceptan o rechazan de acuerdo a las reglas de selección y el esquema del algoritmo hace el resto.

En el algoritmo de Metrópolis se recorren al azar los grados de libertad; para cada uno de ellos se provoca un cambio también al azar que se aceptará o rechazará, esto provoca una transición en el sistema estudiado o puede dejarlo inalterado.

Como cada transformación se usa sobre un grado de libertad cada vez, la variación de la lámina es relativamente pequeña. En todo caso se asegura que exista una probabilidad no nula de que cada forma se pueda transformar en cualquier otra, en un número finito de jugadas

Tras pasar por los mecanismos de cambio de geometría y topología, se aceptará o rechazará el cambio provocado buscando el menor volumen estructural.

Para evitar soluciones indeseadas existen unas rutinas de control. La solución candidata pasará por estas rutinas antes de su análisis.

#### **5.4.2 Intensidades del generador.**

La elección entre los diferentes jugadas de transformación hereda el sistema empleado por Vázquez (1994) en un problema similar, la optimación de cerchas isostáticas. Se hace en proporción al número de grados de libertad presentes en la solución. Por lo tanto la elección entre cambiar la posición de un punto o una barra se realiza en proporción de  $3(n-n_f)$  y  $3n-b$ . Esta proporción puede cambiarse mediante las intensidades definidas para cada caso, esto se hace en el archivo de entrada de datos. De esta manera la probabilidad para cada jugada es proporcional a su intensidad  $I$  y al número de grados de libertad que puede alterar.

También se considera la posibilidad de definir las de modo absoluto, sin referencia al número de grados de libertad. Así según si el valor de la intensidad es positivo o negativo se interpreta como una intensidad o como una probabilidad. Estos valores de intensidades o probabilidades han de definirse para cada jugada.

En el problema aquí presentado, al haber solo dos jugadas, y tener ambos un número de grados de libertad similar, la diferencia entre una modalidad y otra es pequeña. En los ejemplos que se muestran posteriormente tan solo se ha empleado la segunda, y el recocido simulado ha trabajado esencialmente bien.

Esto describe la frecuencia con que se emplea cada algoritmo de transformación.

### 5.4.3 Otros parámetros

Para el correcto funcionamiento de la optimización hay que introducir una serie de limitaciones como lo son la magnitud de desplazamiento que tienen los nudos o el tamaño máximo de las barras.

La primera constante limita la movilidad de los nudos, se ha comprobado que para valores excesivamente grandes, los nudos se podrían mover demasiado provocando la creación de láminas cuyas barras se cruzasen, éstas serían soluciones inaceptables, con lo cual el proceso terminaría con ningún cambio aceptado, llegando a una solución final muy similar a la inicial, entendiéndola falsamente como óptima al no haberse aceptado ningún cambio.

La segunda constante limita el tamaño máximo de las barras, de no ponerse este límite el proceso tiende a dar soluciones que evitan el problema de la flexión, derivándolo hacia problemas de sólo compresión o sólo tracción, esto lo consigue acercando los nudos lo máximo posible a los apoyos, aparecen entonces pequeños soportes o tirantes sobre los apoyos que llevan las cargas directamente a estos y otras barras largas que unen los soportes o tirantes sin a penas sollicitación. Es evidente que es la solución de consumo mínimo pero evita el problema en cuestión. Se verá un ejemplo de esto en el apartado 0. Al introducir la limitación del tamaño máximo de barra suceden varias cosas, una de ellas es que no se exploran configuraciones de grandes cantos, ni pueden garantizarse soluciones afines de cantos mayores a los explorados que supondría exceder el tamaño límite de alguna de las barras de la solución. Por tanto el decidir cual será el tamaño máximo de la barra condiciona las soluciones, si este toma valores muy pequeños se limitará mucho el problema. Por ello se ha estudiado el problema con varias limitaciones de longitud de barra en función de la luz máxima para estudiar las consecuencias.

Los parámetros propios del recocido son los indicados en el capítulo 3. En los siguientes ejemplos se muestra las soluciones finales, pero el proceso ha incluido diversas series consecutivas de recocidos con los siguientes valores:  $nR\{50 \text{ ó } 100, 50, 1, 100 \phi, 0.9\}$ . Esto indica una serie de recocidos de 50 ó 100 ciclos cada uno, en los procesos de mayor número de nudos que son los más lentos, el número



de ciclos se ha reducido hasta 25. El valor de  $\alpha$  ha sido 50, lo que indica procesos medianamente lentos. Con  $\beta=1$  se calcula el número de configuraciones exploradas en función de los grados de libertad (ver apartado 3.5.1). La temperatura inicial del primer recocido,  $\tau_0$ , es igual a cien veces el valor e la función objetivo inicial,  $100 \phi_0$ , en los siguientes se toma la temperatura final del anterior, el factor que indica cómo cambia la temperatura de un ciclo a otro  $\theta=0.9$ .

### 5.5 Ejemplos numéricos:

A continuación se procede a mostrar una serie de ejemplos de aplicación del programa creado para la optimización de láminas. Este es un problema nuevo en la bibliografía existente sobre optimización; por ello no hay ejemplos que sirvan de patrón. Se han elegido una serie de ejemplos que resuelven problemas sencillos, con geometrías básicas. En general se trata de ejemplos muy cercanos, series de estructuras que salvan la misma luz, 100m, y soportan la misma carga,  $4.5\text{kN/m}^2$ .

Variando un parámetro de cada vez, se estudian diferentes configuraciones en planta (circular, cuadrada, rectangular, etc. ), diferentes longitudes de barra, y cada ejemplo planteado se estudia para dos casos, recinto completo y recinto positivo. En el primero se permite que la lámina ocupe todo el espacio, aunque desde el punto de vista de la aplicación del programa se hayan introducido unos límites, éstos están lo suficientemente alejados como para que las soluciones se hayan mantenido lejos de ellos y por tanto no han influido en la configuración de las soluciones. En el segundo se limita el dominio a la mitad superior del eje  $z$ , (recinto positivo).

Aunque la carga por unidad de superficie es la misma para todos los ejemplos y soluciones salvo que se indique lo contrario, hay que destacar que, debido a la manera de repartirla a los nudos, hace que una parte esté directamente aplicada en los nudos de apoyo. Esto varía durante el proceso, por ello se irá indicando en los ejemplos la carga total real soportada, es decir, la carga total salvo la que llega directamente a los apoyos.

En ocasiones se ha tomado como referencia estructuras construidas de autores conocidos que se mencionan como Isler o Norman Foster, con la obligatoria adaptación de la estructura real a las necesidades del problema.

Tras el proceso de búsqueda el programa aporta la solución en archivos adaptados a diferentes programas, aunque en el manual se uso se puede ver una descripción más completa sobre este tema, se adelanta aquí brevemente que uno de ellos sirve de entrada al programa ANSYS, de análisis de estructuras por el método de los elementos finitos, y otro sirve de entrada al programa AutoCAD.

Las imágenes que se muestran son el resultado de analizar la solución con el programa ANSYS-ED 5.3, así el color y el grosor asignado a cada barra corresponde con el axil que la solicita, se acompaña de la escala de colores en cada figura, pudiendo variar entre ellas. Como se puede observar cada figura tiene cuatro imágenes de la misma estructura, abajo a la izquierda, la planta, dos alzados perpendiculares entre si a la derecha y sobre la planta, y finalmente en el cuadrante superior derecho una vista axonométrica. Cada conjunto va rotulado con el “coste” o volumen estructural en kN.m. De esta forma se puede observar la manera de trabajar de la estructura y, en ocasiones, se observará como se concentran la mayor parte de los esfuerzos en unas pocas barras.

Como en ocasiones es difícil hacerse una idea de la volumetría encontrada, paralelamente a la imagen anterior se presenta la imagen renderizada en AutoCAD de la superficie con luces y sombras, y las secciones más significativas cuando con la información anterior no es suficiente. Al tratarse de superficies en tres dimensiones, son geometrías en ocasiones poco claras, en el CD adjunto se incluyen los ficheros de AutoCAD generados por el programa que pueden ayudar al lector a un mejor entendimiento de las soluciones.

La forma inicial de la estructura no es importante si al principio del proceso la temperatura toma valores muy altos, pues entonces se producirán grandes cambios que habitualmente serán aceptados, aun así se muestran las situaciones de partida.

El material empleado tiene un módulo Young de  $21000 \text{ kN/cm}^2$  y tensión admisible de  $26 \text{ kN/cm}^2$ , que corresponde con el acero A-42, (designación según NBE-EA-95). Pero el volumen estructural no depende del material empleado, solo depende del axil de las barras y de su longitud.

Las soluciones son te3ricas al tratarse de la misma manera a las barras comprimidas y a las traccionadas. En la pr3ctica es conocido que no es cierto debido al pandeo de las barras comprimidas.

Aunque en otros ejemplos de aplicaci3n del recocido simulado se ha observado que soluciones intermedias, obtenidas en el proceso, son 3tiles para caracterizar los par3metros que antes se definen en la forma, en esta ocasi3n solo se muestran las soluciones finales, como todos los procesos son similares, se ilustrar3 uno de ellos en el cap3tulo 6.

Adem3s de indicar el volumen estructural en kN.m. de cada soluci3n, inicial o final , este valor se ha desglosado atendiendo a la parte que corresponde al trabajo de las barras traccionadas  $V_s^+$ , comprimidas  $V_s^-$ , y seg3n la direcci3n de transmisi3n de la carga en horizontal  $V_s^=$ ,o vertical  $V_s^{||}$ , con el fin de averiguar la cercan3a al 3ptimo de la estructura en cuesti3n, seg3n la teor3a del dise1o de estructuras presentada en el cap3tulo 49. As3 se podr3n encontrar cuadros adjuntos al texto e imagen de cada soluci3n como el que se muestra a continuaci3n, donde el texto en **negrita** ser3 texto, y en el resto de los recuadros se rellenan con los valores correspondientes seg3n se indica, todo en las mismas unidades, kN.m.

	<b><math>V_s^=</math></b>	<b><math>V_s^{  }</math></b>	
<b><math>V_s^+</math></b>	$V_s^{+=}$	$V_s^{+  }$	$\Sigma V_s^+$
<b><math>V_s^-</math></b>	$V_s^{-=}$	$V_s^{-  }$	$\Sigma V_s^-$
	<b><math>\Sigma V_s^=</math></b>	<b><math>\Sigma V_s^{  }</math></b>	<b><math>V_s</math></b>

tabla 5. 1: Modelo de desglose del volumen estructural.

El n3mero de configuraciones exploradas en cada ciclo de temperatura constante es de  $M=\alpha g^\beta$  . En todos los casos se han empleado los siguientes valores  $\alpha=50$  y  $\beta=1$ , el n3mero de grados de libertad, g, depende de cada problema concreto, por ejemplo para el primer caso estudiado con base circular con 26 nudos y recinto completo,  $g=170$ , por lo que resulta  $M=8500$ . Como el proceso termina en el ciclo 147, el n3mero total de configuraciones exploradas asciende a poco m3s de 1.2millones. Al aumentar el n3mero de nudos, y por tanto de barras, (en este caso se presta atenci3n al ejemplo de base

circular con 101 nudos), de nuevo con  $\alpha=50$  y  $\beta=1$ , en ese caso  $g=638$ , por lo que  $M=31900$  configuraciones exploradas en cada ciclo. Como se puede ver es cerca de cuatro veces mayor, esto hará que con estructuras de mayor número de nudos el proceso sea más lento. Además, como el proceso se detiene en el ciclo 146, el número total de configuraciones exploradas ronda los 4.7 millones, es decir casi cuatro veces más, una relación muy similar a la que hay entre el número de nudos.

## 5.6 Ejemplos con base circular

La configuración de partida consiste en una semiesfera contenida en el semi-espacio  $z \geq 0$ , salvando siempre una luz máxima de 100m (diámetro de la base). Se ha estudiado para diferentes valores de longitud máxima de las barras, 80m, 40m y 20m, que corresponde al 80%, 40% y 20% de la luz. Para los dos primeros casos se ha tomado una estructura de 26 nudos (figura 5. 5), mientras para la longitud menor, al ser necesario que la estructura tenga mayor número de nudos, se ha utilizado un ejemplo de 101 nudos (figura 5. 10). Cada uno de los dos se explican con detalle a continuación

Esta primera serie de ejemplos, de 26 nudos, soporta una carga total de 33.061 e03 kN, de los cuales el 87% está aplicado en nudos variables y el 13% restante directamente en los nudos de apoyo. Como se verá el proceso tenderá a reducir llevando a los apoyos lo más posible.

Los apoyos se han elegido de manera que la estructura es isostática durante todo el proceso. Con 26 nudos y barras ( $e=65$ ) son necesarias 13 bielas, que se consiguen con la coacción vertical de los 10 nudos del contorno, además se añaden tres bielas que impiden el desplazamiento y el giro como un sólido rígido del conjunto en tres nudos diferentes del contorno separados homogéneamente, de manera tangente a la circunferencia de la base, y lo más simétrico posible.



En la configuración inicial el valor desglosado del volumen estructural es como sigue:

	$V_s^=$	$V_s^{''}$	
$V_s^+$	792110	0	792110
$V_s^-$	792110	1014745	1806855
	1584220	1014745	2598965

tabla 5. 2: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 26 nodos, base circular.

Como se ve, tanto el anillo de la base, como los anillos intermedios, trabajan a tracción soportando los empujes que reciben del resto de las barras. Llama la atención el nulo trabajo en traslados verticales a tracción, por otra parte es lógico que la mayor parte de los traslados en vertical sean en compresión debido a que la estructura es una cúpula en recinto positivo.

5.6.1 Solución con  $l_{max}=80\%$  y recinto completo

En esta solución (figura 5. 6) se ve como, con gran libertad para el tamaño de las barras, la solución tiende a hacerlas lo más largas posibles, esto es debido a que no se considera la flexión local en los elementos, así las mejores soluciones en este grupo tienden a configurar una estructura de gran canto. La solución se configura por un arco comprimido en recinto positivo (en rojo) y una catenaria traccionada en recinto negativo (en azul), el conjunto se lleva casi la totalidad de los esfuerzos de la estructura. Entre ambos equilibran el empuje horizontal en la base, de esta forma y gracias a la verticalidad del conjunto arco-catenaria, no es necesario un anillo como se verá en las soluciones de recinto positivo. El conjunto de arco catenaria es casi plano, se une por medio de barras que soportan axiles bajos y que triangulan la superficie. Una última serie de barras cubre el resto del espacio uniendo los puntos de apoyo con la estructura principal, su solicitudión es casi nula, por lo que su influencia en el volumen estructural total es mínimo.

El hecho de tener barras largas provoca que la carga que se aplica directamente en los apoyos aumenta hasta el 58%, lo que indica que solo un 42% está aplicado en los nudos variables. De ahí la gran reducción del volumen estructural.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	221700	178658	400358
$V_s^-$	221700	132409	354109
	443400	311067	754467

tabla 5. 3: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

En la tabla 5. 3 se observa que la posición y dirección de los apoyos no influye en la solución final, de hecho el desglose del volumen estructural horizontal en tracción y compresión da valores idénticos. Por otra parte, el desglose del volumen estructural vertical da valores cercanos entre sí, lo que indica que está compensado el trabajo a tracción y a compresión.

En cuanto a los traslados de carga en horizontal y vertical se observa que son mayores los primeros, siendo 1.43 veces mayor, similar relación sucede en la solución de recinto positivo en la que, también predomina, pero con una relación de 1.41. Esta diferencia indica que el diseño podría mejorarse según la fórmula (4.14), mediante una transformación afín, siendo el factor de proporción  $\kappa = 1.194$ .

Esto produce un aumento del canto, de 66.04m a 78.85m, que no es posible sin sobrepasar el tamaño máximo de las barras. El nuevo volumen estructural después de la transformación propuesta sería de 742771 kN.m, un 1.55% menor.

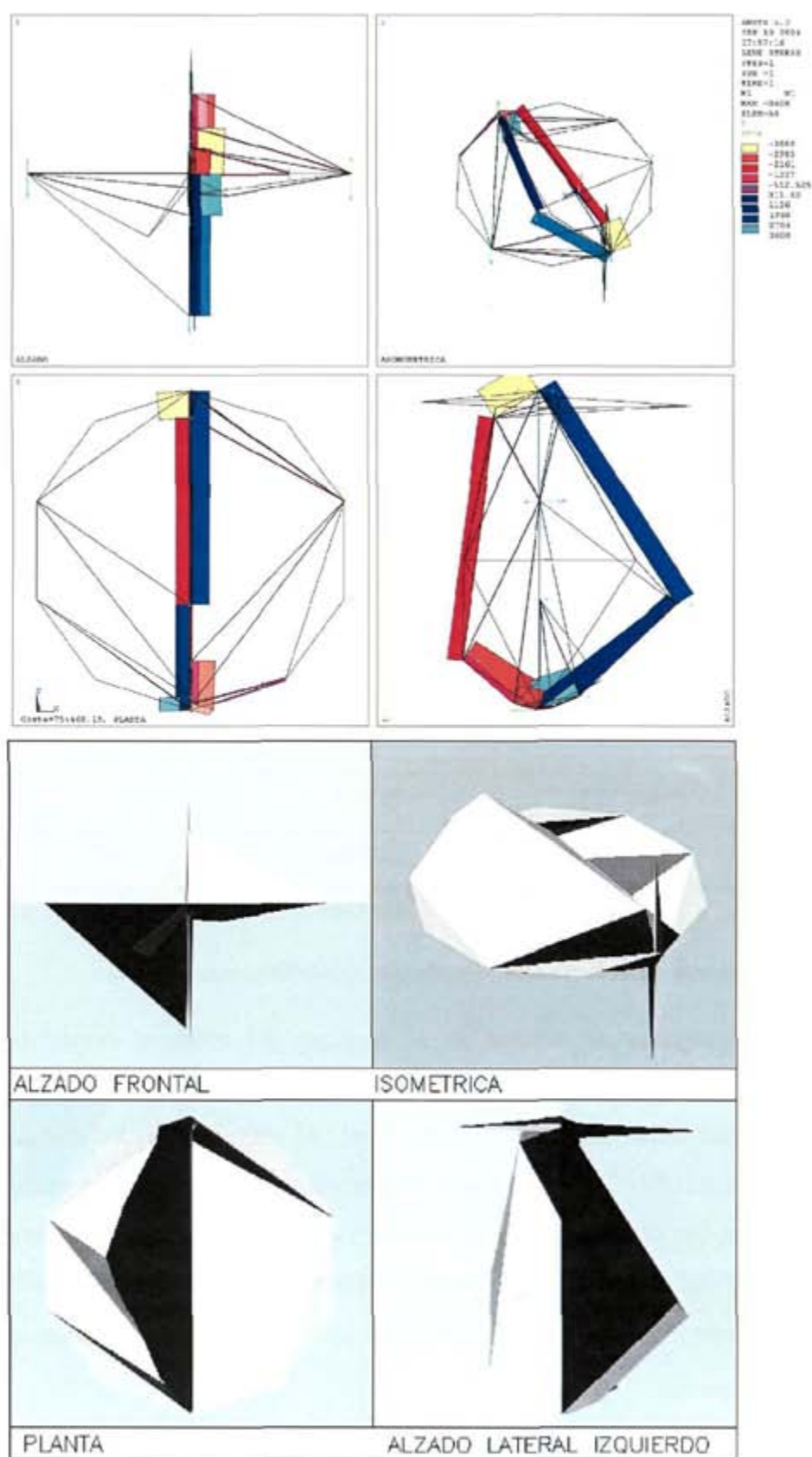


figura 5. 6: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo,  $V_s=0.754 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .



### 5.6.2 Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto positivo

Al restringir el espacio al recinto positivo, las barras de nuevo tienden a ser lo más largas posibles. En este caso encontrando el punto de equilibrio en el que las cargas están a la misma distancia de todos los apoyos. Así la solución es una figura cercana a una pirámide con el mínimo número de apoyos. De esta forma el decágono de la base pasa a ser un exágono irregular, lo que disminuye la longitud de las barras del anillo de que trabajan a tracción. Cabría preguntarse si con un recocido más lento hubiera tomado forma pentagonal regular. El anillo es necesario en este caso para equilibrar los empujes horizontales. Las barras que forman las aristas de la pirámide trabajan a compresión (rojo y amarillo). La asimetría del vértice de la pirámide hace que no todo el anillo trabaje con la misma tensión.

La porción de carga que se aplica directamente en los apoyos es un poco mayor que en el caso anterior, 69%, es decir que la estructura soporta realmente un 31% de la carga total.

	$V_s^-$	$V_s^{II}$	
$V_s^+$	402324	25844	428168
$V_s^-$	402324	542506	944830
	804648	568350	1372998

tabla 5. 4: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.

De nuevo la semejanza de valores en el desglose del volumen estructural horizontal en tracción y compresión ( $V_s^{+} = V_s^{-}$ ) indican que la posición y dirección de los apoyos no han tenido influencia en la solución final. Al comparar los valores del volumen estructural vertical ( $V_s^{+II}$  y  $V_s^{-II}$ ) se ve la compresión es mayor debido a que se trata de recinto positivo. Sin embargo, la diferencia entre volumen estructural horizontal y vertical ( $V_s^-$  y  $V_s^{II}$ ) indica que el diseño podría mejorarse según la fórmula (4.14), siendo el factor de proporción  $\kappa = 1.19$ . Pero eso no sería posible sin sobrepasar el tamaño máximo de las barras.

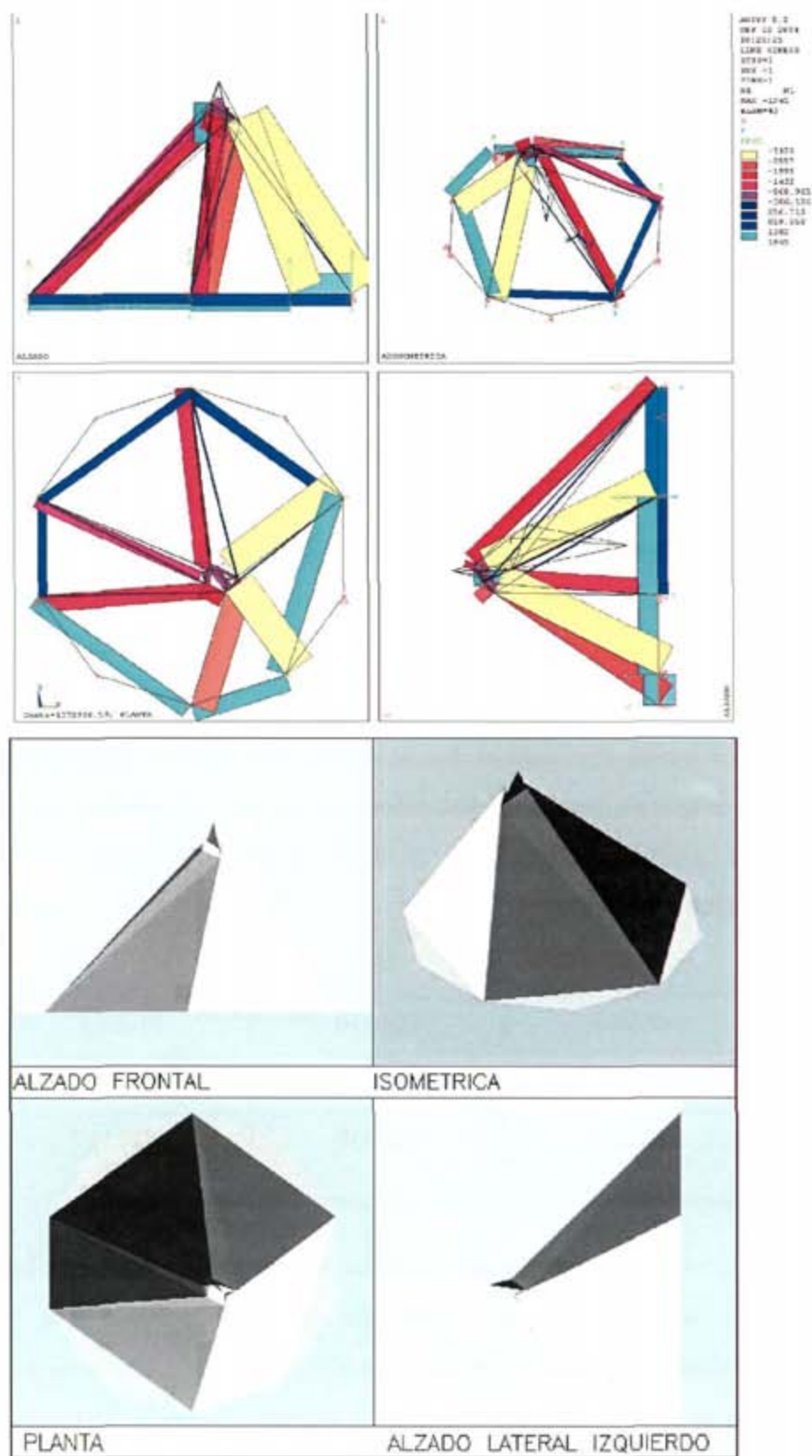


figura 5. 7: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo,  $V_s=1.373 \text{ e}06\text{kN.m}$ .

5.6.3 Solución con  $l_{max}=40\%$  y recinto completo

En la figura 5. 8 se puede observar que cuando la longitud de las barras está limitada al 40% de la luz máxima, la tendencia general es muy similar al caso anterior. Hay una estructura principal formada por un arco en la mitad superior a compresión, y una catenaria en la inferior a tracción; una estructura secundaria de arcos y catenarias transversales los unen con los apoyos.

La pareja arco-catenaria debe dejar la verticalidad para permitir la formación de tracciones en el anillo, esto es necesario para resistir los empujes que provocan los segmentos de arco del recinto positivo. En recinto negativo las barras llegan verticalmente al apoyo por lo que no necesitan la colaboración del anillo en esa zona. De esta manera se fuerza la asimetría de la solución. Esto implica una solución asimétrica. Prestando atención al arco-catenaria se percibe como el área en recinto positivo tiene más inclinación que la de recinto negativo, por lo tanto no forma un plano.

Con longitudes de barras algo más cortas, las estructuras encontradas pueden evitar peor el problema dirigiendo las cargas directamente a los nudos apoyados, así se observa que un 30% se aplica directamente en los nudos de apoyo mientras el 70% restante se aplica en los nudos variables.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	607243	204820	812063
$V_s^-$	607243	402210	1009453
	1214486	607030	1821517

tabla 5. 5: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo.

En la tabla 5. 5 aparece el desglose del volumen estructural. Comparando los valores se observa que la limitación del tamaño de las barras provoca que la configuración no pueda alcanzar la esbeltez óptima, por ello  $V_s^= \neq V_s^{||}$  . mediante una transformación afín con el factor de proporción  $\kappa= 1.41$  (según fórmula 4.14). se conseguiría igualar ambos valores De esta manera el canto total pasaría de 58.67m a 66.88m por lo que la esbeltez disminuiría de 1.70 a 1.5.

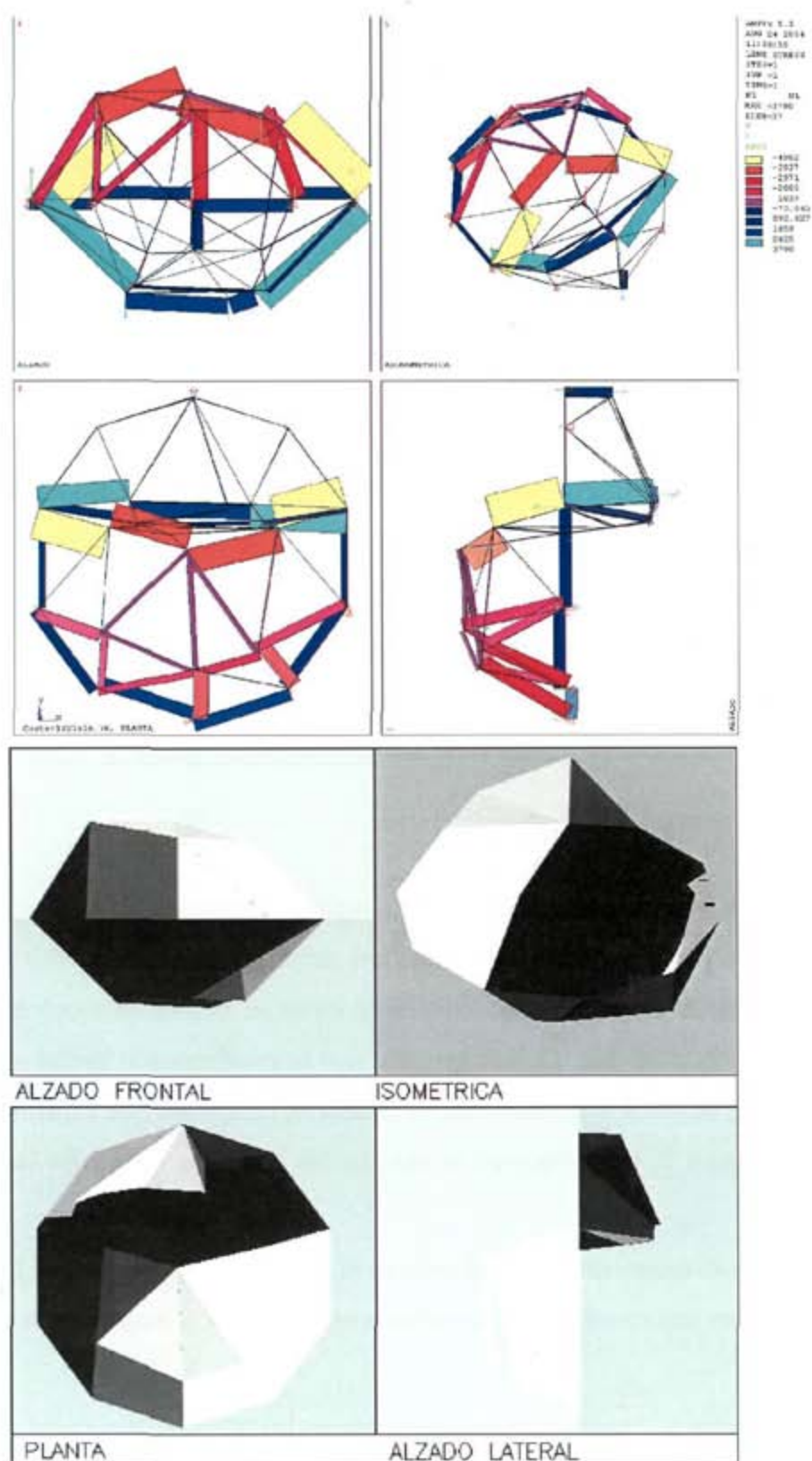


figura 5. 8: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo,  $V_s=1.822 \text{ e}06\text{kN.m}$ .

Al ser un factor alto los valores cambian considerablemente quedando de la siguiente forma:

	$V_s^-$	$V_s^{\text{II}}$	
$V_s^+$	429451	289616	719067
$V_s^-$	429451	568726	998177
	858902	858342	1717244

tabla 5. 6: Volumen estructural desglosado, solución afín para  $L_{\text{max}}=40\%$ , recinto completo.

Se puede apreciar cómo el trabajo realizado en traslados de carga en horizontal  $V_s^-$  disminuye en proporción al factor  $\kappa$ , mientras  $V_s^{\text{II}}$  aumenta en la misma proporción para finalmente hacer que disminuya el valor total del volumen estructural en un 5.7%. Mientras se consigue casi igualar el trabajo correspondiente a traslados horizontales y verticales de carga,  $V_s^- \approx V_s^{\text{II}}$ . La descomposición en tracción y compresión de  $V_s^-$  da idénticos valores pero no sucede lo mismo con  $V_s^{\text{II}}$  por lo que al final  $V_s^+ < V_s^-$ . Esto indica que habría que compensar la estructura entre recinto completo y positivo.

#### 5.6.4 Solución con $l_{\text{max}}=40\%$ y recinto positivo

La solución en este caso se asemeja a un paraboloide de revolución, ligeramente apuntado (figura 5. 9). Se puede ver cómo se forman una serie de arcos entrelazados y apoyados unos en otros que, al llegar al apoyo se abren en forma de A, para distribuir en empuje de una manera más uniforme. En comparación con la configuración inicial se aprecia que sólo aparecen anillos a tracción donde es necesario, en la zona más superior (en azul oscuro en la figura 5. 9 arriba) y en la base (color cian) que compensa los empujes de los arcos.

La carga aplicada directamente en los apoyos es el 15% del total, por lo que la carga soportada es bastante alta en relación a las soluciones anteriores, y muy cercana a la configuración inicial.

Se observa en la tabla 5. 7 como el trabajo realizado en los traslados horizontales de carga es igual en las barras comprimidas y traccionadas, lo que indica que la posición y dirección de los apoyos no influye en el reparto de trabajo de la solución final. Sin

embargo, el desglose del volumen estructural vertical da valores muy distantes, siendo mucho mayor el trabajo de las barras comprimidas, esto es debido a que es una solución en recinto positivo.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	544306	1943	546249
$V_s^-$	544306	965519	1509825
	1088612	967462	2056074

tabla 5. 7: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{\max}=40\%$ , recinto positivo.

Por otra parte la limitación del tamaño de las barras impide adquirir la esbeltez óptima. Mediante una transformación afin (según la fórmula 4.14) esto podría conseguirse, siendo el factor de proporción  $\kappa=1.06$ . De esta manera los valores quedarían como se muestra en la tabla 5. 8.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	513013	2060	515073
$V_s^-$	513013	1024412	1537425
	1026026	1026472	2052498

tabla 5. 8: Volumen estructural desglosado, solución afin para  $L_{\max}=40\%$ , recinto positivo.

Como se ve se ha reducido la función objetivo del problema ligeramente, tan solo un 0.2%. El volumen estructural correspondiente al traslado de cargas en vertical aumenta en la proporción,  $\kappa=1.06$ , la misma en que disminuye el correspondiente a traslados en horizontal, dando valores similares,  $V_s^= \approx V_s^{||}$ . El desglose del trabajo horizontal en tracción y compresión, además de haber descendido, permanecen iguales. Esto no puede suceder con el trabajo en vertical debido a que la solución se restringe al recinto positivo.

Posteriormente se compararán estas soluciones con las siguientes, con mayor número de nudos.

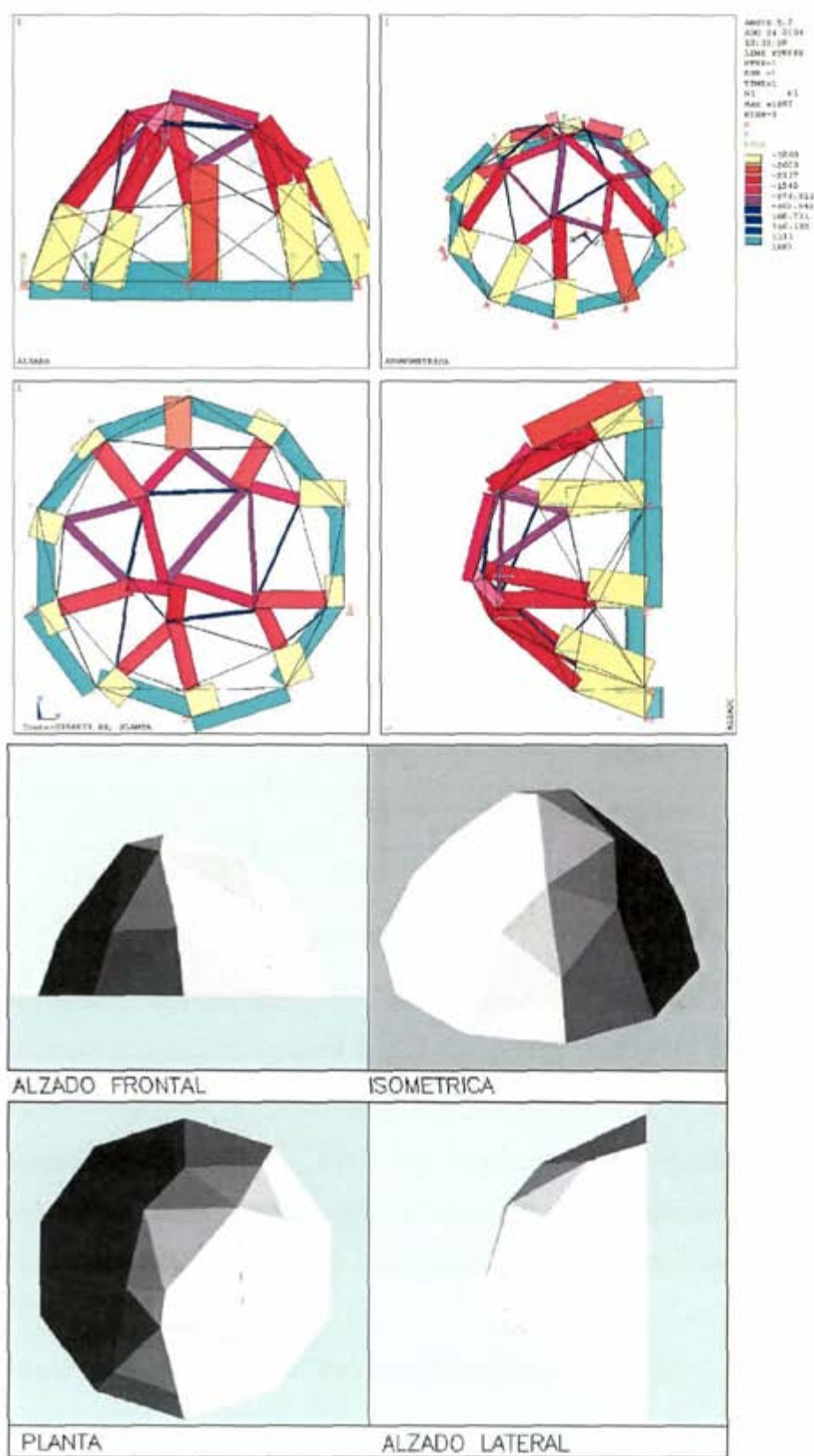


figura 5. 9: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo,  $V_s=2.056 \text{ e}06\text{kN.m.}$

### 5.6.5 Configuración inicial para $l_{max}=30\%$ y $20\%$

Para ejemplos con longitudes máxima de barra más cortas ( $30\%$  y  $20\%$  de la luz máxima) se ha empleado la solución inicial que se puede apreciar en la figura 5. 10. Similar a la anterior pero con 101 nudos y 280 barras, por lo que necesita 23 bielas de sustentación, 20 de las cuales son los apoyos verticales de los nudos de la base y las tres restantes son horizontales, tangentes a la circunferencia para que no se lleve los empujes de la estructura e intervengan en el reparto del trabajo. Se puede observar en la tabla 5. 9 que  $V_s^=$  es igual a  $V_s^{+=}$  lo que indica que realmente estas bielas no se llevan los empujes.

El volumen estructural es de  $3.010 \text{ e}06 \text{ kN.m}$  desglosado como se puede ver en la tabla 5. 9, este valor es mayor que la solución inicial para el ejemplo de 26 nudos aunque la configuración es similar. La razón es que con mayor número de nudos, hay menor proporción de carga que se aplique directamente en los apoyos. Del total de la carga soportada,  $34.767 \text{ e}06 \text{ kN}$ , un  $2\%$  se aplica en los nudos apoyados y el  $98\%$  restante en los nudos variables.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	926831	10774	937605
$V_s^-$	926831	1145957	2072788
	1853662	1156731	3010393

tabla 5. 9: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 101 nodos, base circular

Debido a las relaciones entre  $V_s^=$  y  $V_s^{||}$ , y a que la solución inicial es de recinto positivo, ya se puede afirmar que se podría mejorar este diseño sin modificar la topología mediante una transformación afín, según la fórmula (4.14), con  $\kappa=1.27$ . De esta manera el canto aumentaría de  $50\text{m}$  a  $63.30\text{m}$  y se conseguirá reducir un  $2.7\%$  el volumen estructural total.

Se ha comprobado que esta solución inicial es válida para su recocido con longitudes de barra mínimas de  $30\%$ , tanto en recinto positivo como completo, para longitudes menores,  $20\%$ , en recinto positivo se muestra la solución final en



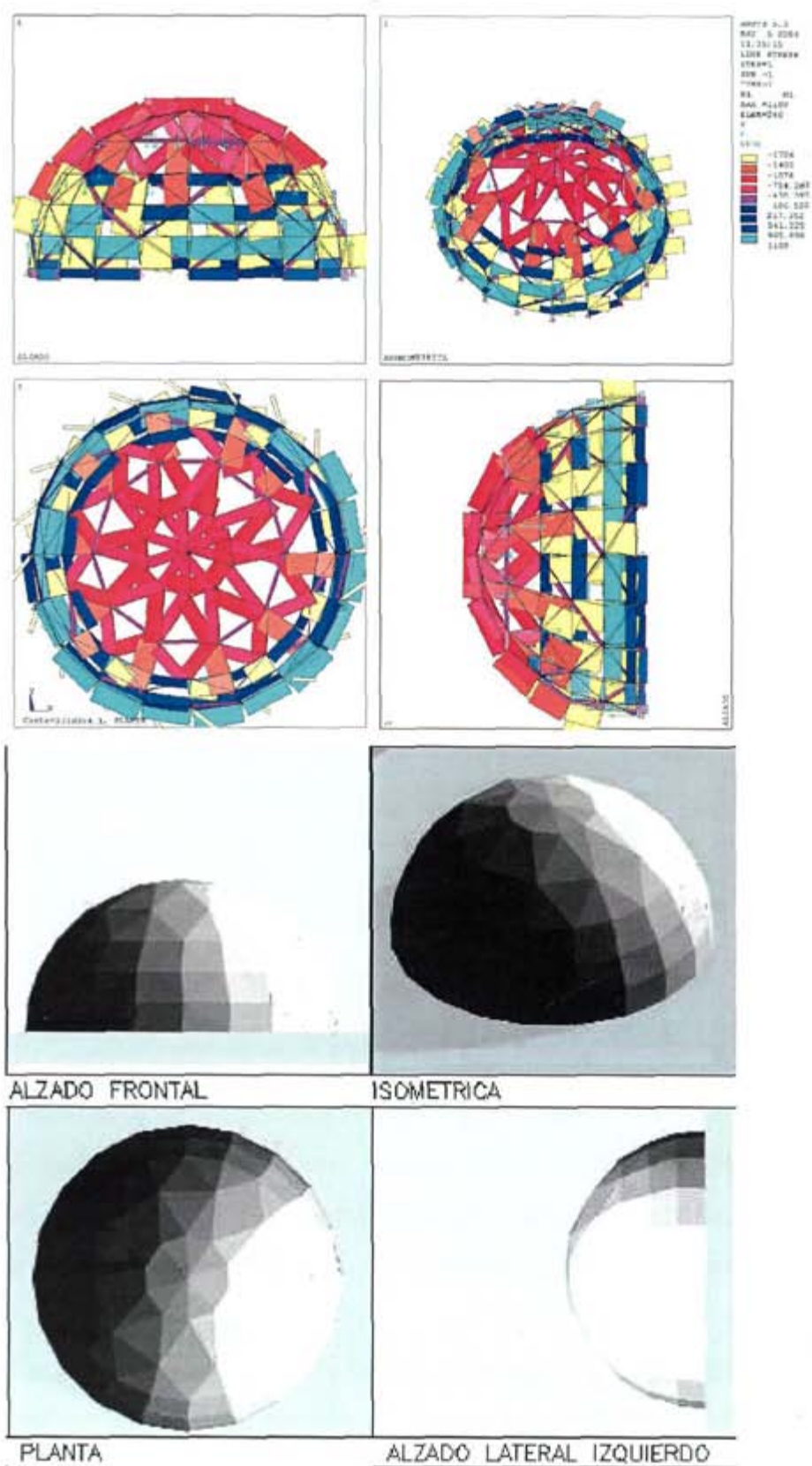


figura 5. 10: Solución inicial de 101 nodos, base circular,  $V_s=3.010 \times 10^6 \text{ kN.m}$ .

el apartado 5.6.8, sin embargo para recinto completo, la limitación de longitud de barra impide poder alcanzar el canto necesario ocupando todo el espacio, el recocido busca la mejor solución posible que es muy similar a la de recinto positivo. Ante la carencia de interés de este caso, se ha optado por no incluirlo en el texto.

5.6.6 Solución con  $l_{max} = 30\%$  y recinto completo

En la figura 5. 11 se muestra la solución encontrada para una longitud de barra máxima del 30%. La configuración es similar al ejemplo análogo con barras más cortas, ocupa la totalidad del espacio, y la estructura queda dividida claramente en dos partes, sobre el plano de apoyo y bajo él, en la unión se forma un arco y una catenaria que compensan entre sí sus empujes. De nuevo la pareja arco-catenaria debe dejar la verticalidad para permitir la formación de tracciones en el anillo, esto es necesario para resistir los empujes que provocan los segmentos de arco del recinto positivo. En recinto negativo las barras llegan verticalmente al apoyo por lo que no necesitan la colaboración del anillo en esa zona. De esta manera se fuerza la asimetría de la solución. Esto implica una solución asimétrica. Prestando atención al arco-catenaria se percibe como el área en recinto positivo tiene más inclinación que la de recinto negativo, por lo tanto no forma un plano.

La carga aplicada directamente en los apoyos es del 19%, siempre aumenta respecto a la solución inicial, aunque menos con barras más cortas.

	$Vs^=$	$Vs^{  }$	
$Vs^+$	538470	98569	637039
$Vs^-$	538470	756038	1294508
	1076940	854607	1931547

tabla 5. 10: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=30\%$ , recinto completo.

En el desglose de la tabla 5. 10 se observa como no intervienen los apoyos horizontales al ser  $Vs^{+=} = Vs^=$  . Sin embargo la ligera desigualdad entre  $Vs^=$  y  $Vs^{||}$  indica que el volumen estructural final aún se puede reducir un poco más. Si se hace una

transformaci3n af3n con el factor de proporci3n  $\kappa = 1.123$  (seg3n f3rmula 4.14), pasar3a del canto total de 75.7m a 85m.

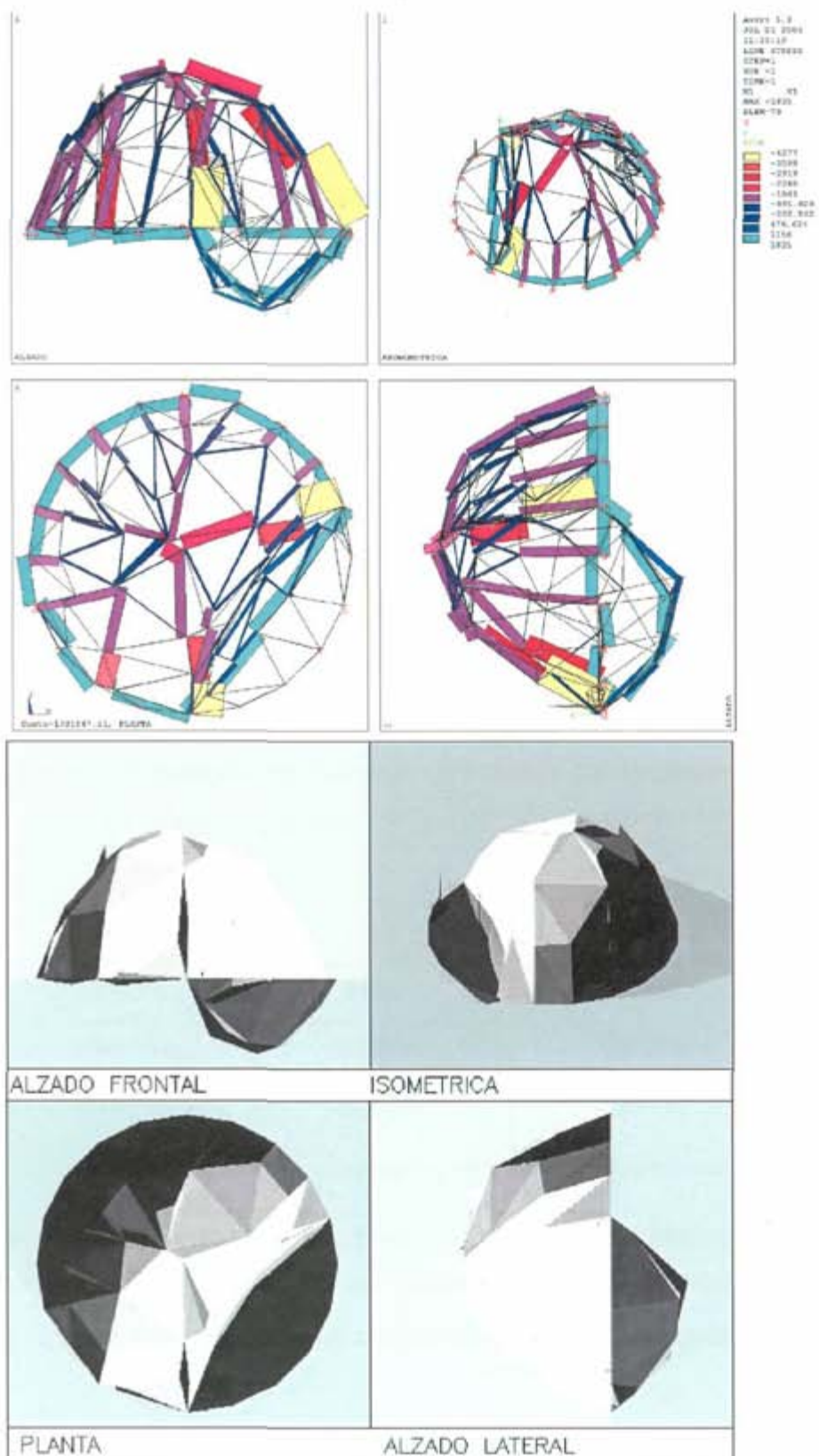
Tras esta operaci3n el desglose del volumen estructural queda como se muestra en la tabla 5. 11. Se aprecia el descenso del volumen estructural total del 0.7%.

	$V_s^-$	$V_s^{''}$	
$V_s^+$	479492	110693	590185
$V_s^-$	479492	849030	1328522
	958984	959723	1918707

tabla 5. 11: Volumen estructural desglosado, soluci3n af3n para  $L_{max}=30\%$ , recinto completo.

Una nueva mejora pasar3a por compensar el volumen estructural vertical de tracci3n y compresi3n (  $V_s^{+''}$  y  $V_s^{-''}$  ), esto se conseguir3a compensando la estructura sobre la superficie de apoyo y bajo 3sta.

A primera vista parece que dise1os sim3tricos fueran mejores, al ser necesario un aumento del canto del arco-catenaria, tal vez desplaz3ndose m3s al centro, de este modo el efecto de arrastre lateral que da origen al anillo traccionado, como compensaci3n de los arcos transversales secundarios, tambi3n ser3a necesario en el recinto negativo dando origen igualmente a una fracci3n de anillo comprimido, compensando las tracciones de catenarias secundarias transversales. Pero no puede afirmarse que esto mejore el conjunto, de hecho debe influir la longitud de las barras y el traslado de parte de carga al apoyo, en que las soluciones resulten sim3tricas, uno de los lados se aprovecha del traslado al apoyo y en el otro la soluci3n que minimizar3a el anillo y los arcos transversales.



### 5.6.7 Solución con $l_{max}=30\%$ y recinto positivo

Con recinto positivo (figura 5. 12) la solución sigue la pauta de las soluciones anteriores, una cúpula de barras trabajando fundamentalmente a compresión, sin anillos intermedios, salvo el anillo de la base a tracción. Aunque ocasionalmente aparecen barras uniendo los arcos comprimidos en una cota casi horizontal a modo de anillo, su trabajo es casi nulo. La cúpula está ligeramente apuntada, en alzado se observa como la figura es parabólica, y es prácticamente simétrica.

Los arcos se sitúan en una posición radial, en esta misma dirección aparecen unas plegaduras de la superficie que ayudan a resistir las flexiones locales.

El volumen estructural se ha reducido en un 28% respecto del inicial, mientras que la carga aplicada en los apoyos aumenta del 2% al 21%.

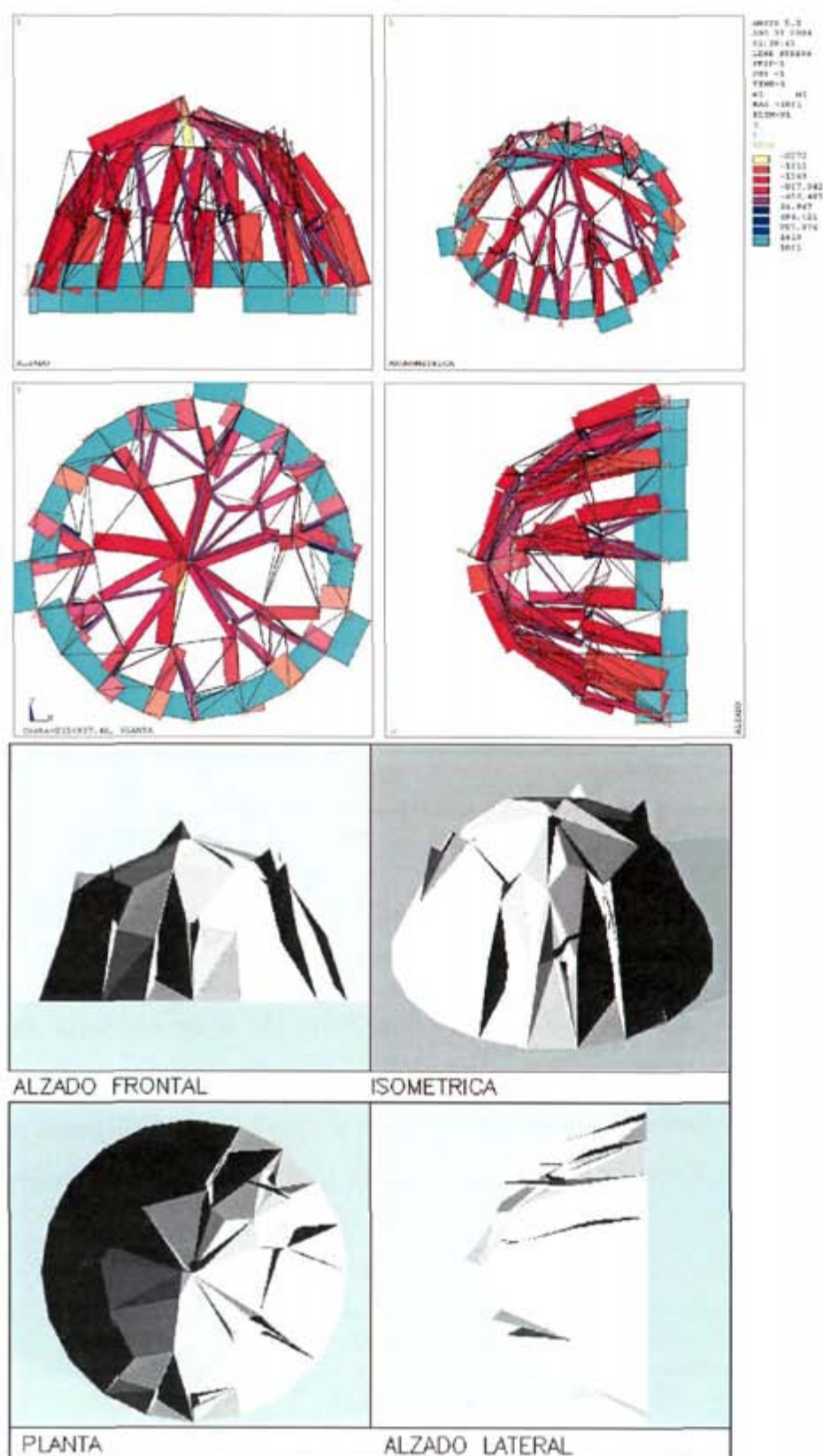
El valor del volumen estructural correspondiente a traslados de carga en horizontal ( $V_s^=$ ) es muy cercano al vertical ( $V_s^{||}$ ), como se puede ver en la tabla 5. 12, por lo que una mejora mediante una transformación afin sería muy pequeña, de hecho  $\kappa=1.08$ , es un valor muy cercano a 1, el volumen estructural total se reduciría en un 0.3% quedando 2.149 e06 kN.m. Mientras el canto aumentaría pasando de 59.25m a 63.94m.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	579707	10265	589972
$V_s^-$	579707	985256	1564963
	1159414	995521	2154935

tabla 5. 12: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=30\%$ , recinto positivo.

Con esta transformación afin se alcanza un canto similar al previsto cuando se analizaba la solución inicial, sin embargo, debido a los cambios tanto en geometría como en topología, el volumen estructural ha disminuido considerablemente respecto a la previsión.

De nuevo, al ser un diseño de recinto positivo, se observa que en el desglose del trabajo vertical  $V_s^{+||} < V_s^{-||}$ .





5.6.8 Soluci3n con  $l_{max}=20\%$  y recinto positivo

Reduciendo aun m3s la longitud de las barras, el canto total alcanzado es de 45.50m un poco menor al inicial de 50m. La forma sigue siendo un paraboloide de revoluci3n. El 3ngulo de arranque en el apoyo ha cambiado de 84.20° a 66.27°. Las barras que conforman la figura est3n en su mayor3a comprimidas, con valores m3s altos las que tienen direcci3n hacia los apoyos. Nuevamente aparece el anillo traccionado en la base. La figura es pr3cticamente sim3trica. En ocasiones, cuando el n3mero de barras lo permite, aparecen unas pequeñas subestructuras en direcci3n radial, a modo de plegaduras que rigidizan la superficie localmente.

A pesar de la similitud de la forma con la soluci3n inicial, incluso se ha reducido el canto, el volumen estructural se ha reducido en un 25%, debido principalmente a que la serie de anillos intermedios apenas trabajan. Con barras cada vez m3s cortas la carga aplicada directamente en los apoyos va disminuyendo hasta el 12% en esta ocasi3n.

	$V_s^-$	$V_s''$	
$V_s^+$	694947	6402	701349
$V_s^-$	694947	871961	1566908
	1389894	878363	2268257

tabla 5. 13: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=20\%$ , recinto positivo.

Seg3n los valores de la tabla 5. 13 y la f3rmula (4.14) se podr3a hacer una transformaci3n afin con  $\kappa=1.26$  y se obtendr3a un canto de 57.24m, esto implicar3a barras m3s largas que el l3mite impuesto. En este caso el desglose quedar3a como se indica en la tabla 5. 17. Como se observa el volumen estructural se puede reducir todav3a en un 2.5%

	$V_s^-$	$V_s''$	
$V_s^+$	551694	8090	559784
$V_s^-$	551694	1098522	1650216
	1103388	1106612	2210000

tabla 5. 14: Volumen estructural desglosado, soluci3n afin para  $L_{max}=20\%$ , recinto positivo.

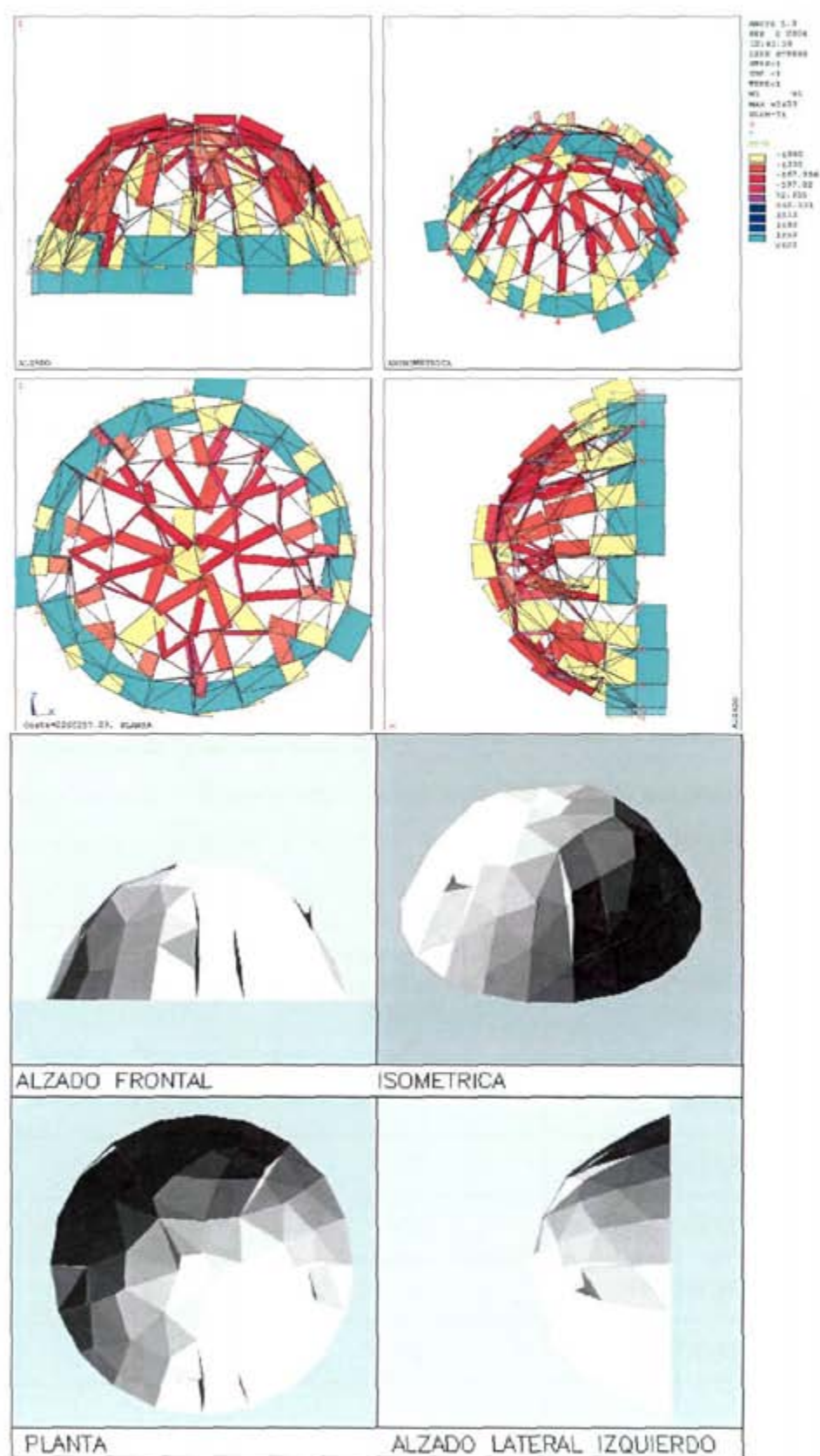


figura 5. 13; Solución para  $L_{max}=20\%$ , recinto positivo,  $V_s=2.268 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .



5.6.9 Resumen de resultados

En la tabla 5. 15 se muestran los resultados obtenidos comparando paralelamente las soluciones de recinto completo y recinto positivo, salvo para el 20% de la luz que solo se ha estudiado el caso de recinto positivo. Se indican los valores de volumen estructural (Vs) y esbeltez (l/h).

Circular	Recinto Completo		Recinto Positivo	
Lmax:	Vs	l/h	Vs	l/h
80% (80m)	0.754 e06	100/66.04 = 1.514	1.373 e06	100/56.08 = 1.783
40% (40m)	1.822 e06	100/61.14 = 1.654	2.056 e06	100/53.19 = 1.88
30% (30m)	1.931 e06	100/75.69 = 1.32	2.155 e06	100/59.25 = 1.69
20% (20m)	-	-	2.268 e06	100/45.50 = 2.19

tabla 5. 15: Resumen de resultados.

Para ver como se ha ido reduciendo la carga aplicada directamente en los apoyos, o lo que es lo mismo, aumentar la carga aplicada en los nudos variables y que es la que realmente soporta la estructura, se ha elaborado la tabla 5. 16 que se muestra a continuación:

	CARGA TOTAL (kN)	Recinto completo CARGA EN LOS APOYOS %	Recinto positivo CARGA EN LOS APOYOS %
INICIAL	33.061 e03	-	13
80% (80m)	33.061 e03	57	69
40% (40m)	33.061 e03	30	15
INICIAL	34.767 e03	-	2
30% (30m)	34.767 e03	19	21
20% (20m)	-	-	12

tabla 5. 16: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos.

Se observa como con grandes longitudes de barra las soluciones reducen rápidamente la función objetivo, entre otras estrategias, reduciendo la carga aplicada en los nudos variables. Con longitudes más cortas es más difícil evitar el problema de esta manera.

Para comparar las soluciones de recinto positivo, en la figura 5. 14 se muestran en paralelo los alzados de la estructura inicial, y las soluciones para 30% y 20% de longitud máxima de barras.

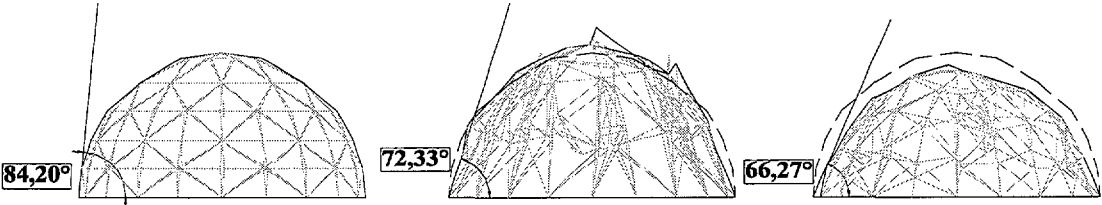


figura 5. 14: Comparativa de alzados en recinto completo. Solución inicial, Lmax=30% y Lmax=20%.

Considerando la flexión global de hundimiento de la forma comparando la estructura inicial (semiesfera) con las soluciones (paraboloides), se puede observar según la figura 5. 15 la ventaja de los paraboloides frente a la semiesfera; a igual canto aumenta el brazo global, por ello, en la solución de Lmax=20%, a pesar de la leve reducción del canto total, el brazo de palanca ha aumentado respecto del inicial y eso reduce el trabajo realizado. Para Lmax=30% además de aumentar el brazo de palanca aumenta el canto, por lo que se suman los dos efectos y el volumen estructural es el menor entre los tres.

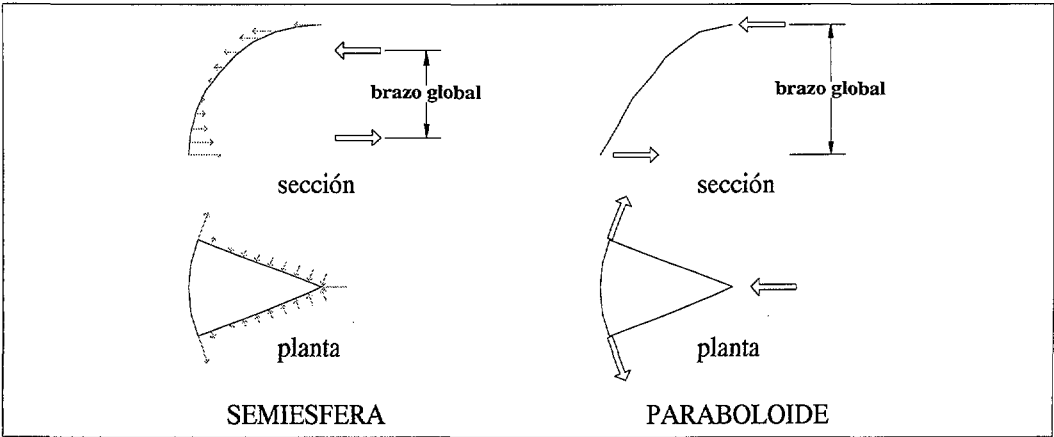


figura 5. 15: Comparación a hundimiento de un sector de estructura.

### 5.7 Ejemplos con base cuadrada con apoyos continuos

Para este caso se ha tomado como referencia la estructura del aeropuerto de Stansted, en Londres, de Norman Foster (figura 5. 16). El modelo tomado es una simplificación del módulo de cubierta de este aeropuerto, no se ha pretendido copiar las dimensiones, cargas, ni tipo de apoyos, tan solo tener una configuración inicial, de hecho, en el modelo, aparecen unas barras de mayor sección, como elementos de contorno, que han de trabajar a flexión, en la búsqueda planteada se sustituye por apoyo continuo en el perímetro, y todas las barras tendrán la misma importancia, salvo que el proceso de búsqueda indique lo contrario.

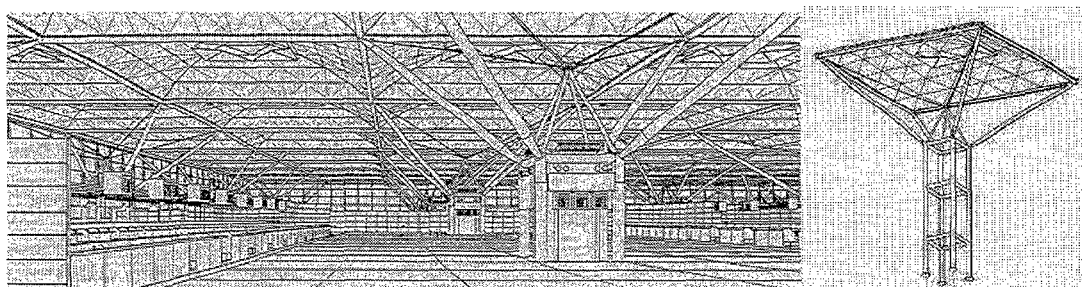


figura 5. 16: Aeropuerto de Stansted en Londres, por Norman Foster.

Se ha escalado este módulo de manera que, al igual que en ejemplos anteriores, la luz máxima a salvar sea de 100m, en este caso corresponde con el lado del cuadrado que conforma la base.

Para el estudio con longitudes de barra del 80% y 40% se ha empleado la estructura inicial que aparece en la figura 5. 18, para la longitud del 30% la configuración inicial es la que aparece en la figura 5. 25.

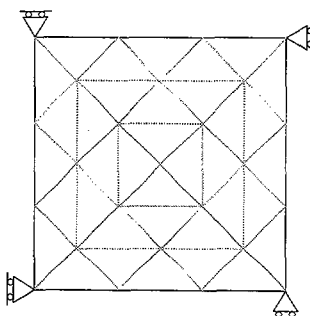


figura 5. 17: Disposición de las reacciones horizontales.

El primero de los modelos tiene 25 nudos, los apoyos se distribuyen de manera que los 12 puntos del contorno tienen coaccionado su desplazamiento en vertical, al tener un total de 60 barras, para cumplir con la igualdad de  $3n=e+b$ , s3lo son necesarias tres bielas m3s. Como no se pueden distribuir homog3neamente se decide optar por una estructura internamente isost3tica ubicando un v3nculo horizontal en cada uno de los cuatro apoyos de las esquinas, como se muestra en la figura 5. 17, de manera que no influya su posici3n en el reparto de trabajo. As3 hay un solo v3nculo redundante. Esta misma estrategia, o similar, se utilizar3 en los ejemplos de base rectangular como se ver3 posteriormente.

Con esta configuraci3n inicial la carga total es de 44.983 e03 kN, de la cual el 25% est3 aplicada directamente en los nudos de apoyo y el 75% restante en los nudos variables. El volumen estructural se desglosa de la siguiente manera:

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	14601648	165374	14767022
$V_s^-$	14601648	407159	15008807
	29203296	572533	29775829

tabla 5. 17: Volumen estructural desglosado, soluci3n inicial, base cuadrada.

A continuaci3n se muestran las soluciones, que, como se ver3 , tienen muchas caracter3sticas comunes con las anteriores de base circular.



5.7.1 Solución con  $l_{max}=80\%$  y recinto completo

En esta solución (figura 5. 19) se observa de nuevo la tendencia a las barras largas. Al igual que sucedía con la base circular aparece una estructura de gran canto formada por un arco comprimido (rojo y amarillo) y una catenaria traccionada (azul) coincidentes en los puntos de apoyo. De esta forma contrarrestan sus empujes parcialmente, el resto se lo lleva la fracción de anillo traccionado que a su vez compensa los arcos transversales secundarios. Esto sucede gracias a que la distinta inclinación del arco y de la catenaria.

La pareja arco-catenaria adquiere el mayor canto posible en función de la longitud de las barras y se lleva casi la totalidad de los esfuerzos de la estructura. Su situación en planta es asimétrica. El segundo orden estructural de las barras que unen la estructura principal con los apoyos adquieren la forma de dos pirámides de base irregular yuxtapuestas, una uniendo el arco con los apoyos, en recinto positivo, y otra haciendo lo mismo con la catenaria en el recinto negativo.

Mientras la catenaria permanece en vertical, la catenaria se inclina para permitir la formación de tracciones en el anillo, esto es necesario para resistir los empujes que provocan los segmentos de arco del recinto positivo. Esto favorece una solución asimétrica.

La carga directamente aplicada sobre los nudos de apoyo de nuevo aumenta hasta el 73% del total, es decir solo un 27% está aplicado en los nudos variables. Este es uno de los factores que favorecen la la fuerte reducción de volumen estructural.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	366037	72485	438522
$V_s^-$	366037	356611	722648
	732074	429096	1161172

tabla 5. 18: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

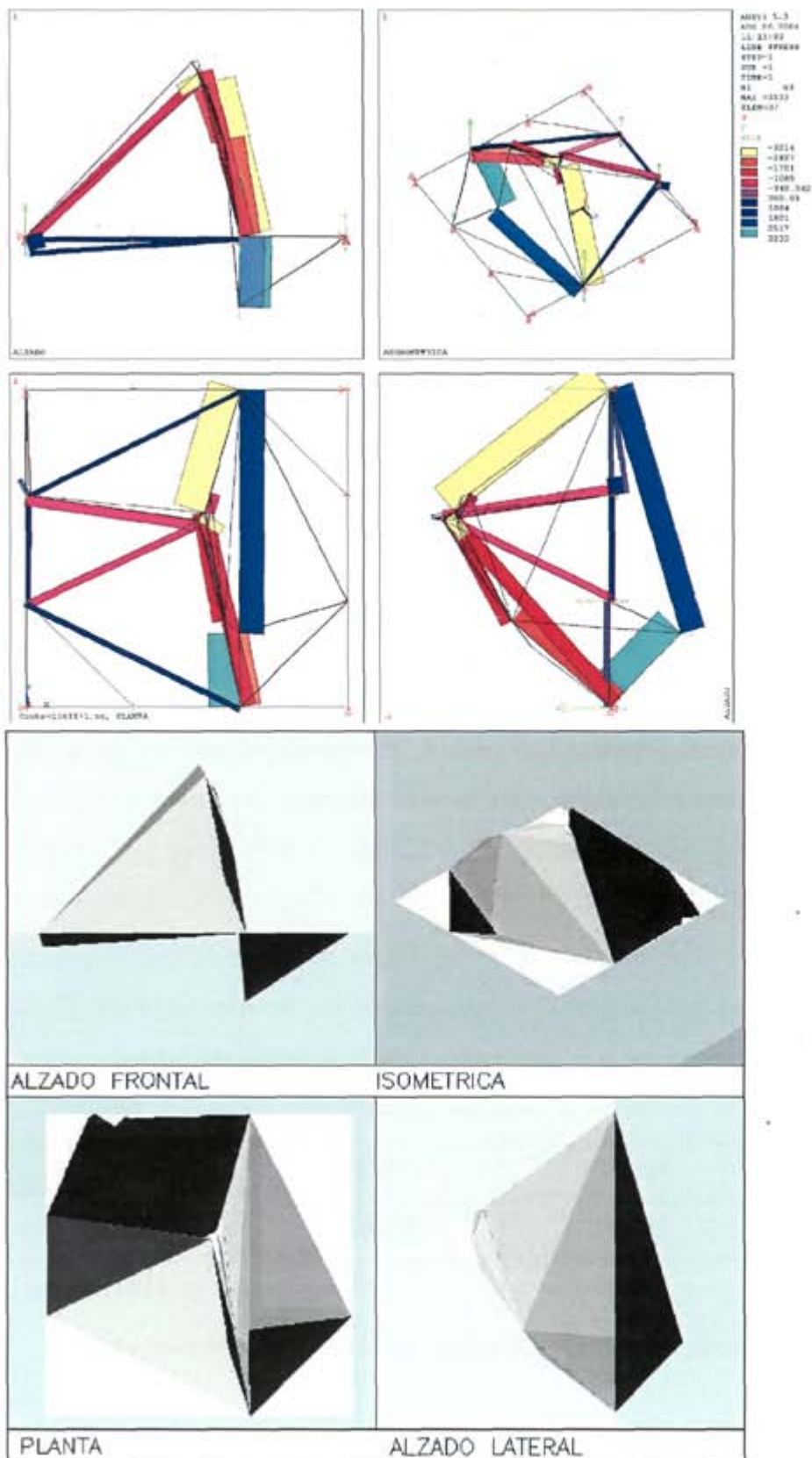


figura 5. 19: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo,  $V_s=1.161 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .

En cuanto al desglose del volumen estructural, se observa en la tabla 5. 18 que efectivamente la distribución de los apoyos no influye en la configuración, al comprobar que  $Vs^{+} = Vs^{-}$  . En cuanto al trabajo horizontal y vertical es mayor el primero en una proporción de 1.70, estos valores podrían ser iguales, a la vez que se reduciría el volumen estructural total, realizando una transformación afin con  $\kappa=1.31$ , de esa manera la distribución quedaría según la tabla 5. 19.

	$Vs^=$	$Vs^  $	
$Vs^+$	281277	94725	376002
$Vs^-$	281277	465764	747042
	562555	560489	1123044

tabla 5. 19: Volumen estructural desglosado, solución afin para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

Se puede apreciar cómo  $Vs^=$  ha disminuido en el factor  $\kappa$ , mientras  $Vs^||$  ha aumentado en la misma proporción, llegando a tomar valores muy cercanos , la no igualdad es debido al redondeo en las operaciones.

El trabajo vertical es mayor la compresión que la tracción, esto es debido a que más carga se ha quedado por encima de los apoyos, de hecho se observa que la mayor parte de la estructura pertenece al recinto positivo. Otra mejora se conseguiría compensando la estructura entre recinto positivo y negativo sin variar el canto.

5.7.2 Solución con  $l_{max}=80\%$  y recinto positivo

Cuando se limita la búsqueda al recinto positivo (figura 5. 20), de nuevo aparece la pirámide, de esta forma gran parte de la carga va directamente a los apoyos, el 69% del total, lo que reduce fácilmente el volumen estructural. En este caso, para encontrar el camino más corto de las cargas al apoyo, se busca los puntos de la base más cercanos a la carga y por ello aparece una nueva base cuadrada con lado menor al original mediante el cuadrado girado, apareciendo unas zonas planas en las esquinas. Las barras del anillo trabajan a tracción (azules), mientras que el resto lo hacen fundamentalmente a compresión (amarillo y naranja). También aparece alguna barra que prácticamente no trabaja.



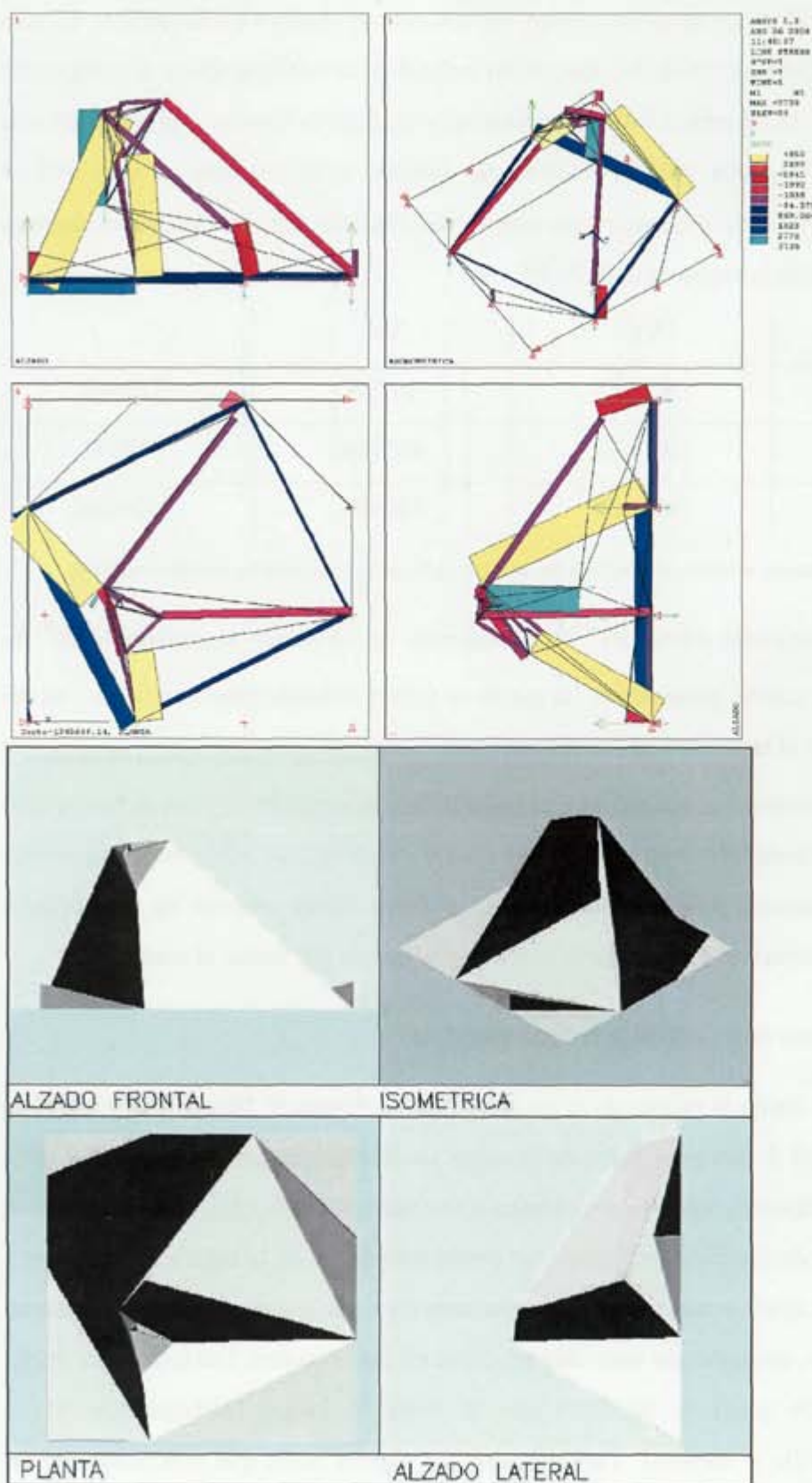


figura 5. 20: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo,  $V_s=1.346 \text{ e}06\text{kN.m}$ .

	$Vs^=$	$Vs^  $	
$Vs^+$	345816	123197	469013
$Vs^-$	345816	530821	876637
	691632	654018	1345650

tabla 5. 20: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.

En recinto positivo debe predominar el trabajo a compresión sobre el de tracción, la diferencia entre ambos debe medir el coste de bajar la carga a la cota cero. En este caso, al comparar el trabajo en horizontal con el vertical ( $Vs^=$  y  $Vs^||$ ) se observa que la solución encontrada tiene un valor de canto total casi inmejorable mediante una transformación afín, de hecho el factor  $\kappa$  es de 1.03. De esta forma el volumen estructural se reduciría sólo en un 0.04%. El desglose total apenas cambiaría.

### 5.7.3 Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto completo

La solución intenta acercarse a la análoga con base circular. Al no poder contar con las reacciones horizontales de los apoyos, ni facilitar la forma de la base un anillo circular a tracción, se crea ese anillo mediante el cambio de la disposición de las barras (topología) buscando una forma cercana a la de una circunferencia (figura 5. 22). La formación de este anillo provoca una ligera reducción de las uces más largas a salvar (diagonales) igualándolas a las cortas. Por otra parte se lleva los empujes producidos por la semiestructura de recinto positivo. Este anillo delimita el cambio de recinto, se observa como aparece unos pequeños valles en las esquinas que ayudan a adaptar la forma circular del anillo a la base cuadrada, a la vez que aumentan el canto total. El anillo se ve transformado cuando aparece el sistema arco-catenaria (sección C de la figura 5. 21).

Del total de la carga, el 34% se aplica directamente en los nudos apoyados, como se ve, la tendencia es a aumentar este porcentaje respecto de la solución inicial.

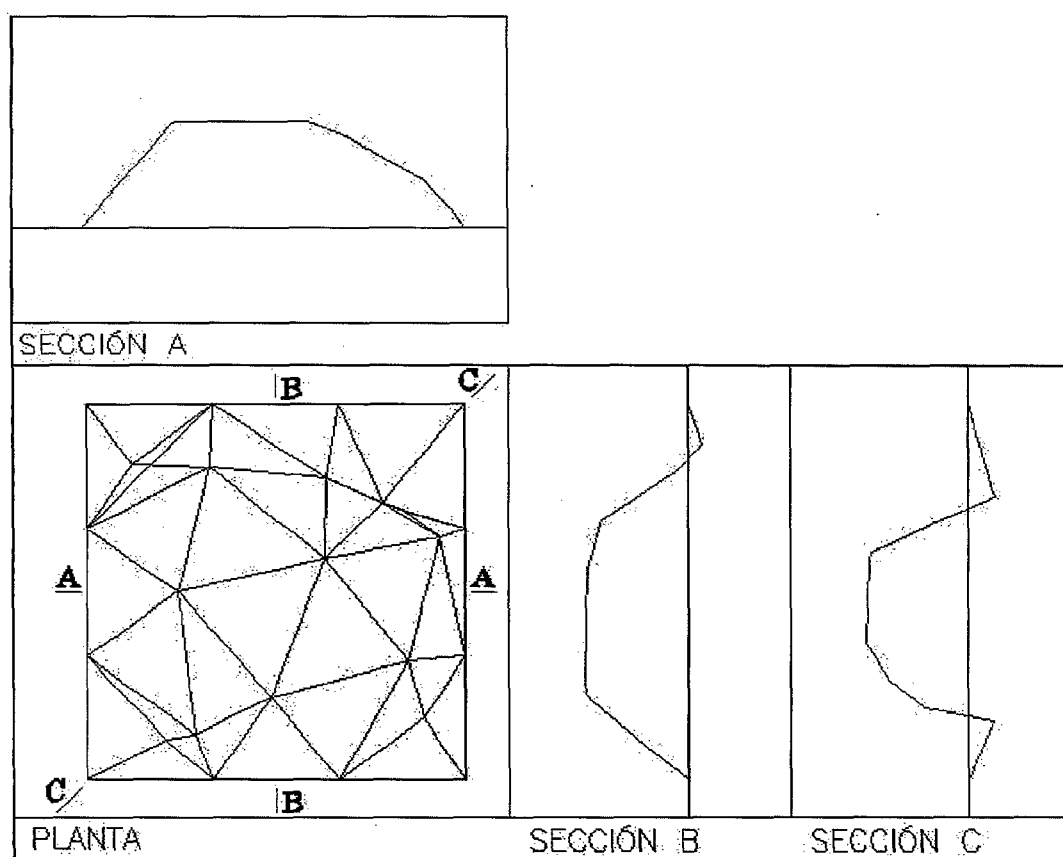


figura 5. 21: Secciones.

El desglose del volumen estructural se puede ver en la tabla 5. 21. En esta ocasión hay un mayor trabajo a compresión que a tracción pues no está igualmente repartida la estructura entre recinto positivo y negativo. Una mejora de la solución sería compensar la geometría entre recintos, lo que implica barras más largas.

	$V_s^+$	$V_s^-$	$V_s^{\text{II}}$
$V_s^+$	1122808	162835	1285643
$V_s^-$	1122808	593261	1716069
	2245616	756096	3001712

tabla 5. 21: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{\text{max}}=40\%$ , recinto completo.

Para reducir el volumen estructural también sería necesario un aumento de canto que implica barras más largas que el límite impuesto, realizando una transformación afín con  $\kappa=1.72$  se aumenta el canto de 40.11m a 69.12m, reduciéndose en un 13% el volumen estructural.

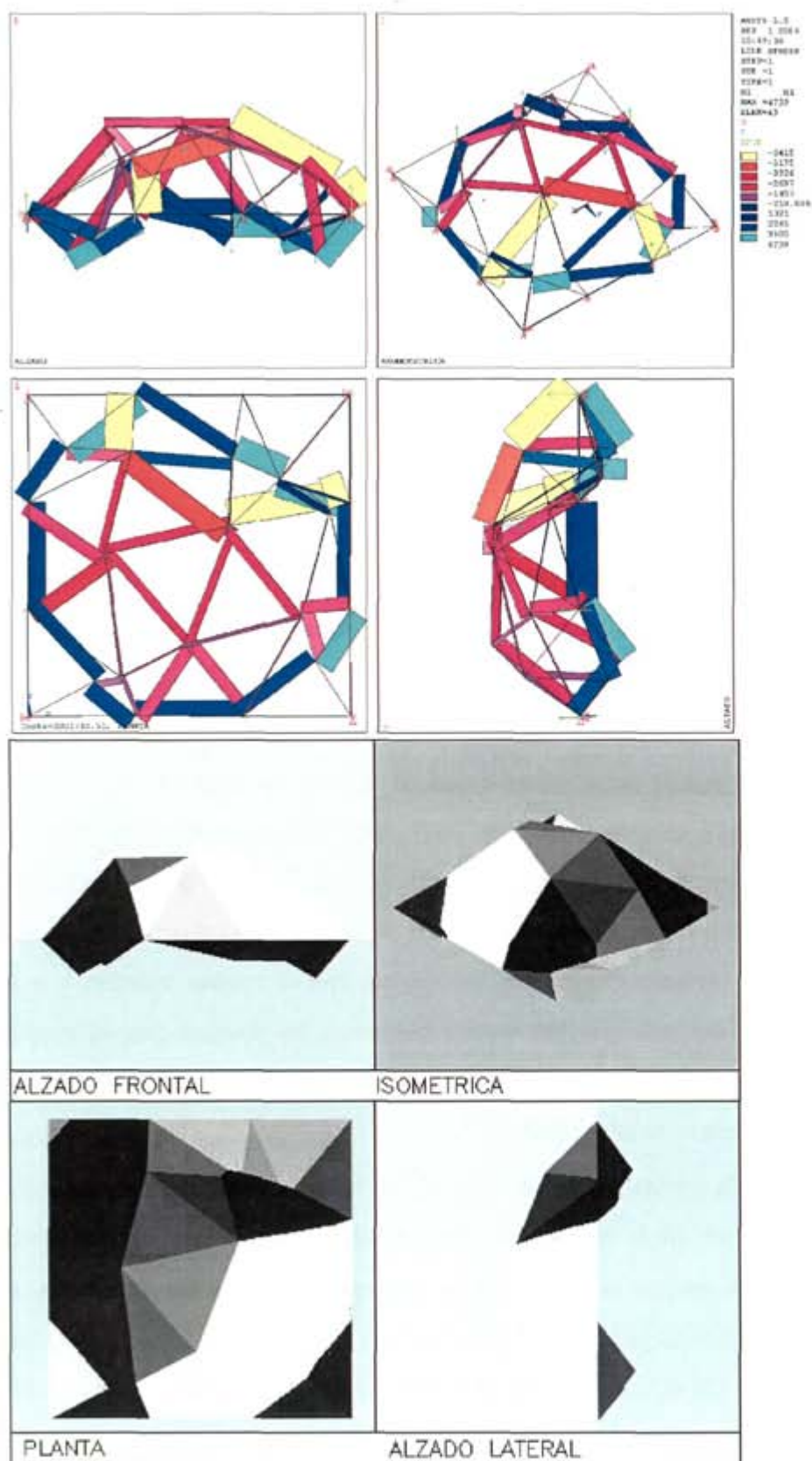


figura 5. 22: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo,  $V_s=3.002 \text{ e}06\text{kN.m}$ .

Haciendo esta transformaci3n el nuevo desglose queda como se muestra en la tabla 5. 22. Donde se observa que se han igualado el trabajo horizontal y el vertical, mientras, el trabajo a compresi3n sigue siendo mayor que el de tracci3n.

	$V_s^-$	$V_s^+$	
$V_s^+$	656093	278622	934715
$V_s^-$	656093	1018866	1674959
	1312186	1297488	2609674

tabla 5. 22: Volumen estructural desglosado, soluci3n afin para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo.

En esta ocasi3n se ha repetido el proceso cambiando los apoyos, de forma que sean redundantes. La estructura tiene coaccionados todos los desplazamientos en los cuatro nudos de las esquinas. La importancia de esta soluci3n radica en que los ejemplos de base rectangular repetir3n de una manera muy cercana esta estrategia.

Se puede observar en la figura 5. 23 como en esta ocasi3n no es necesaria la formaci3n del anillo en la base pues aprovecha para llevar los esfuerzos a los apoyos. De esta manera no reduce la luz a salvar como en el ejemplo anterior. La soluci3n recurre a una estructura arco-catenaria, en este caso inclinada, formada por dos cordones, el superior comprimido (amarillo y naranja), y el inferior traccionado (azul), triangulado interiormente. De esta manera se divide la superficie en dos, a la izquierda un valle formado por las barras que unen los apoyos con el cord3n inferior, y a la derecha un mont3culo formado por las barras que unen los apoyos con el cord3n superior. Esta serie de barras adoptan la forma de arco para resistir las cargas con esfuerzos fundamentalmente de compresi3n.

La carga aplicada en los nudos de apoyo es el 36% del total, del mismo orden que en la soluci3n anterior. En la descomposici3n del volumen estructural, tal y como se ve en la tabla 5. 23, se aprecia la influencia de esta nueva disposici3n de apoyos, el desglose de trabajo horizontal ya no da valores iguales ( $V_s^{+-} \neq V_s^{-+}$ ), de hecho hay una diferencia de 0.419 e06 kN.m, cantidad que al sumarla en el termino de  $V_s^{+-}$  producir3a valores similares a los de la tabla 5. 21. Por lo tanto esta es la diferencia entre los vol3menes totales.

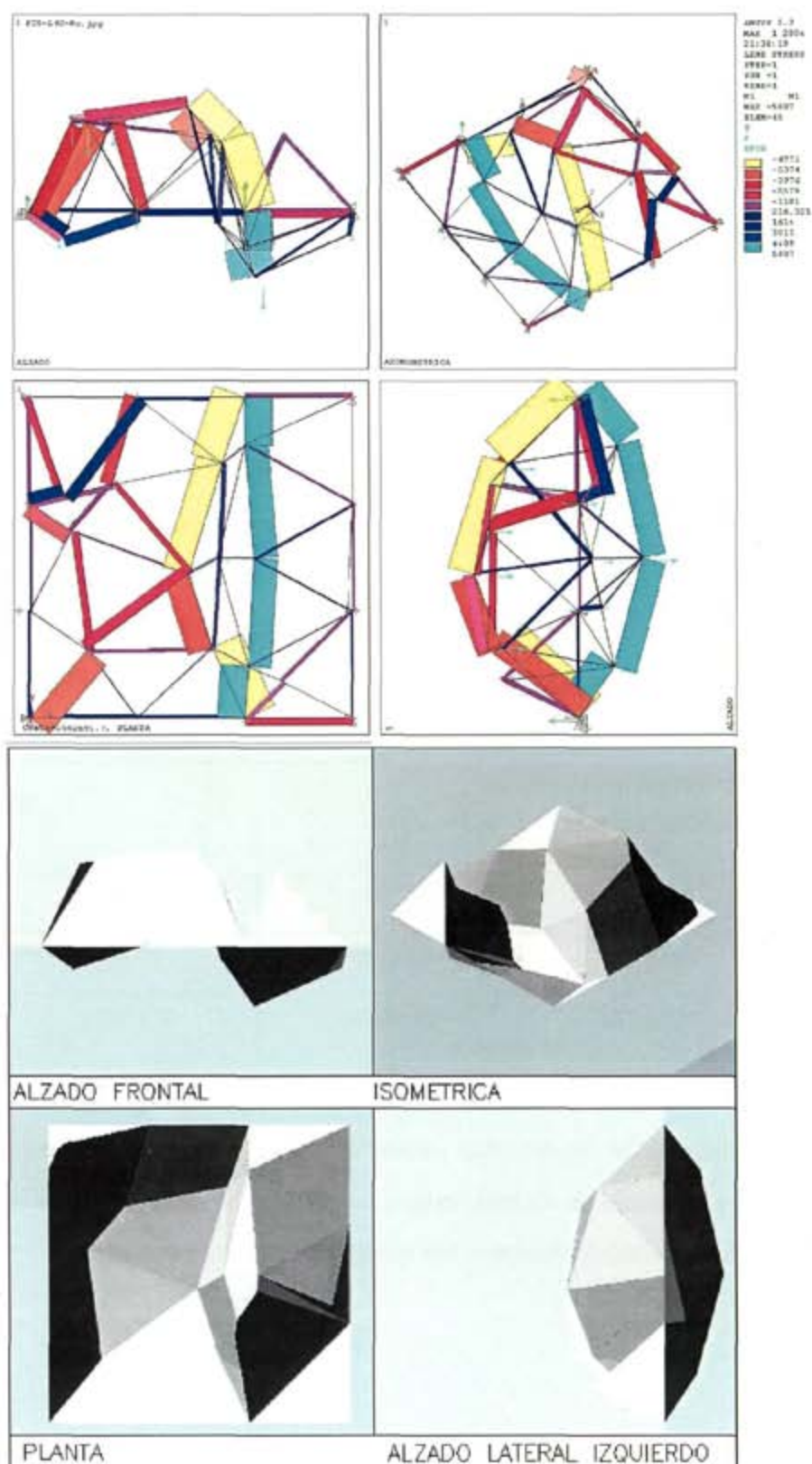


figura 5. 23: Solución para  $L_{max}=40\%$  y apoyos horizontales, recinto completo,  $V_s=2.662 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .

	$V_s^-$	$V_s^{II}$	
$V_s^+$	761043	180730	941773
$V_s^-$	1180258	540660	1720917
	1941301	721390	2662691

tabla 5. 23: Volumen estructural desglosado, solución alternativa para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo

#### 5.7.4 Solución con $L_{max}=40\%$ y recinto positivo

Volviendo al modelos de un solo apoyo redundante, se observa en la figura 5. 24, como para recinto positivo la solución encontrada de nuevo adopta una forma similar a la cúpula. En este caso aunque la base sea cuadrada en las esquinas aparecen zonas planas. En este caso al ser necesario el anillo de la base, algo contradictorio con la forma cuadrada, aparece un extraño polígono irregular que une los puntos a cota  $z=0$ . Es un anillo un tanto irregular que trabaja a tracción. En la adaptación de la forma del anillo y la base cuadrada aparecen zonas planas.

	$V_s^-$	$V_s^{II}$	
$V_s^+$	1265789	205745	1471534
$V_s^-$	1265789	911749	2177538
	2531578	1117494	3649072

tabla 5. 24: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo

La altura total alcanzada es ligeramente menor al ejemplo análogo con base circular, y también menor al ejemplo de recinto completo anterior. La carga aplicada en los nudos apoyados es el 33% del total, similar al los ejemplos de recinto completo.



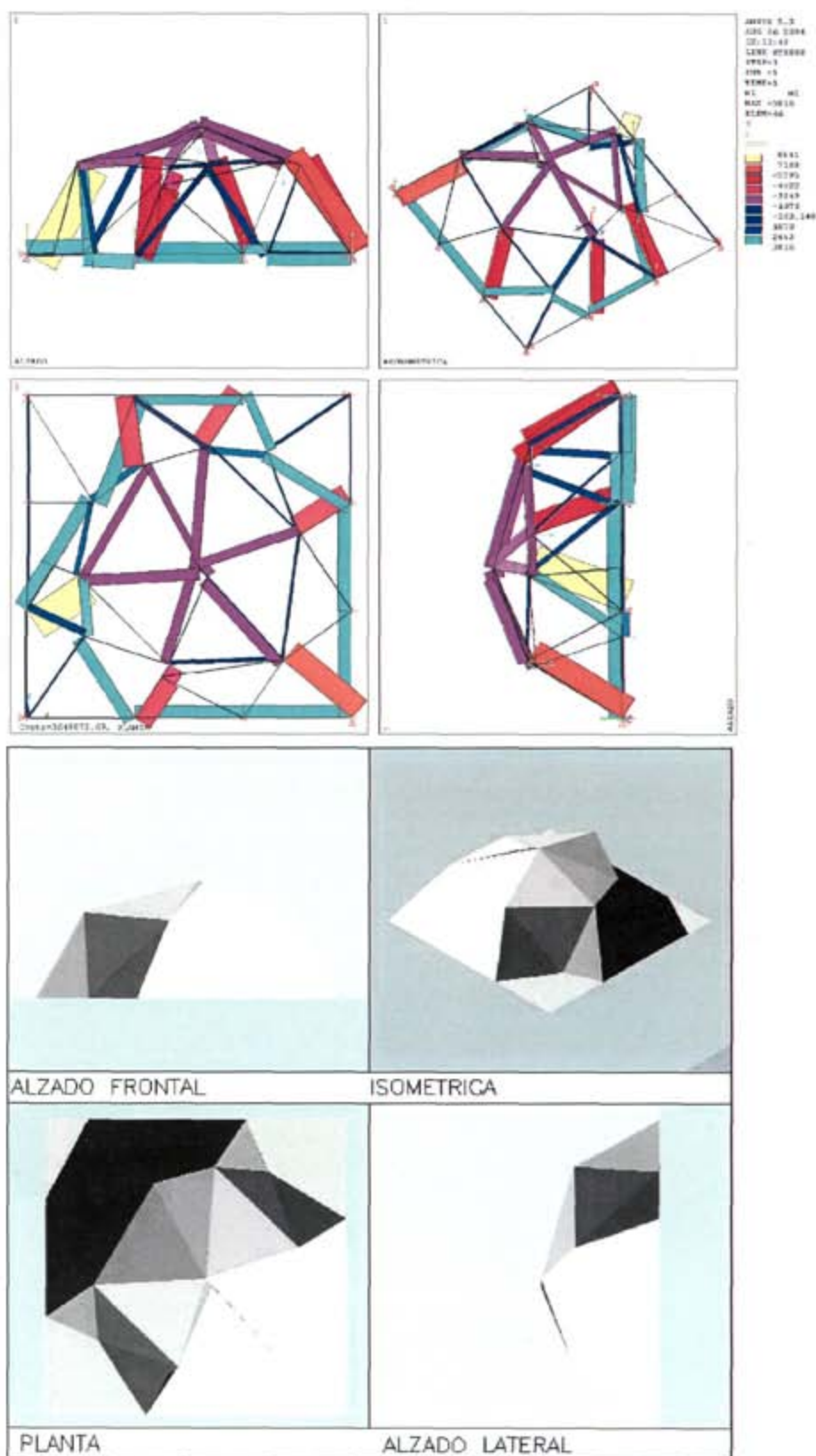


figura 5. 24: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo,  $V_s=3.649 \text{ c06kN.m}$ .



Del an3lisis de la tabla 5. 24 se deduce que de nuevo los apoyos horizontales no influyen en el reparto del trabajo. Por otra parte el trabajo a compresi3n es mayor que el de tracci3n, siendo la relaci3n  $Vs^{-||} / Vs^{+||} = 4$ .

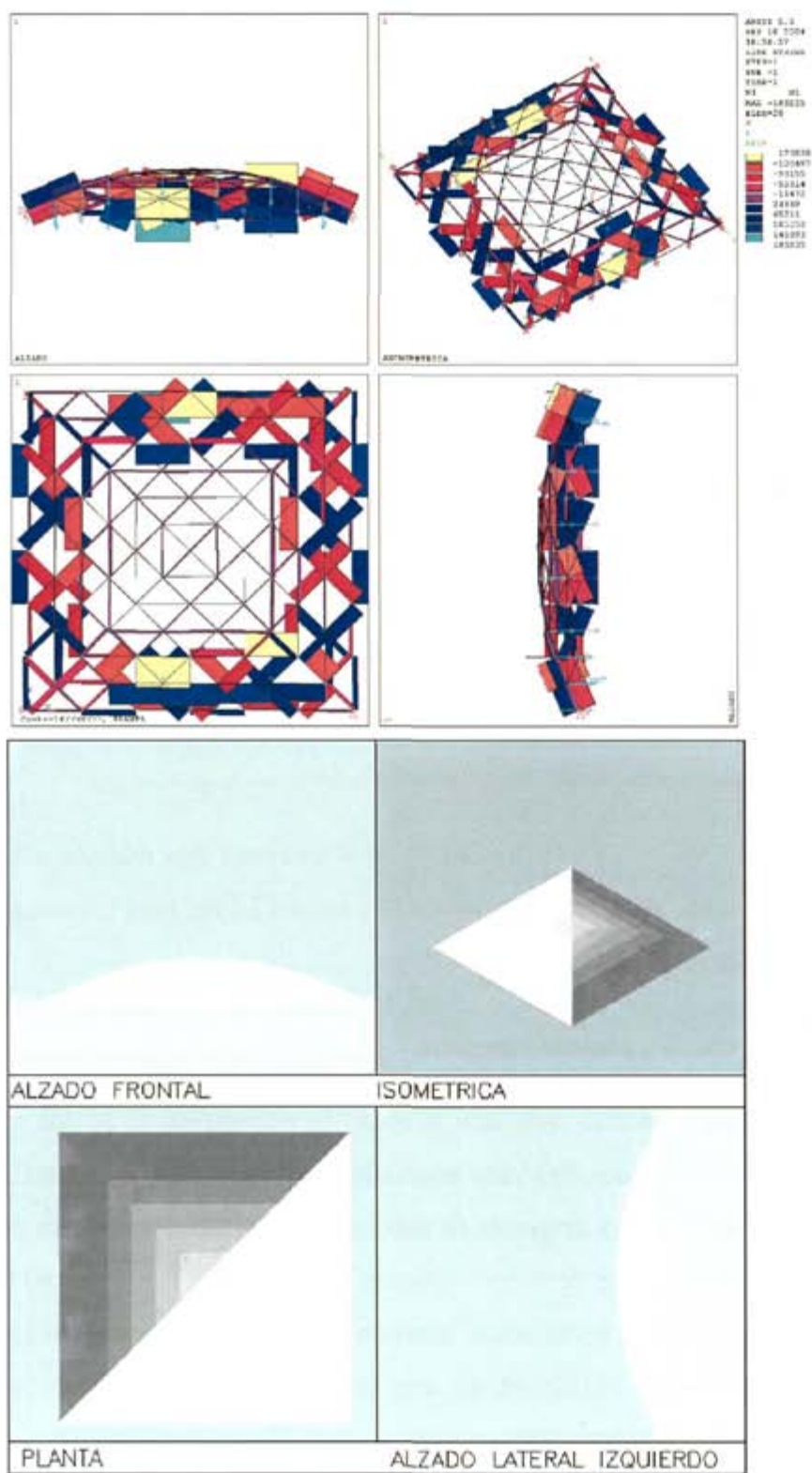
Esta soluci3n se puede mejorar realizando una transformaci3n afin con  $\kappa=1.50$  (f3rmula 4.14) . As3 se aumenta el canto pasando de 39.38m a 59.27m, los valores de volumen estructural quedan de la siguiente manera (tabla 5. 25):

	$Vs^=$	$Vs^{  }$	
$Vs^+$	844076	308413	1152489
$Vs^-$	844076	1367245	2211321
	1688152	1675658	3363810

tabla 5. 25: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo

Se ha reducido el volumen correspondiente a traslados horizontales por el mismo factor en que ha aumentado el de verticales. El volumen estructural total se ha reducido en casi un 8%con el aumento de canto. Sigue siendo mayor el trabajo global debido a compresi3n que el de tracci3n debido a ser una soluci3n de recinto positivo.

### 5.7.5 Configuración inicial para $l_{max}=30\%$



Para los siguientes ejemplos se ha utilizado una estructura con mayor número de nudos y barras, debido a que las barras deben ser más cortas. Como se puede ver en la figura 5. 25, la estructura inicial sigue la misma pauta que en los ejemplos anteriores de base cuadrada. Con un total de 85 nudos y 228 elementos, con los 24 nudos del contorno coaccionados en su desplazamiento vertical, más el impedimento de desplazamiento en una dirección horizontal cada vértice como se representa en la figura 5. 17, da un total de 28 bielas de sustentación, lo que hace que el conjunto sea hiperestático por sustentación con redundancia igual a 1. El volumen estructural es de 148.439 e06 kN.m, mientras que la carga total soportada es de 44.940 e03 kN, de este total el 16% se aplica directamente en los nudos de apoyo. Como se verá no es un diseño optimizado, por lo que será fácilmente mejorable.

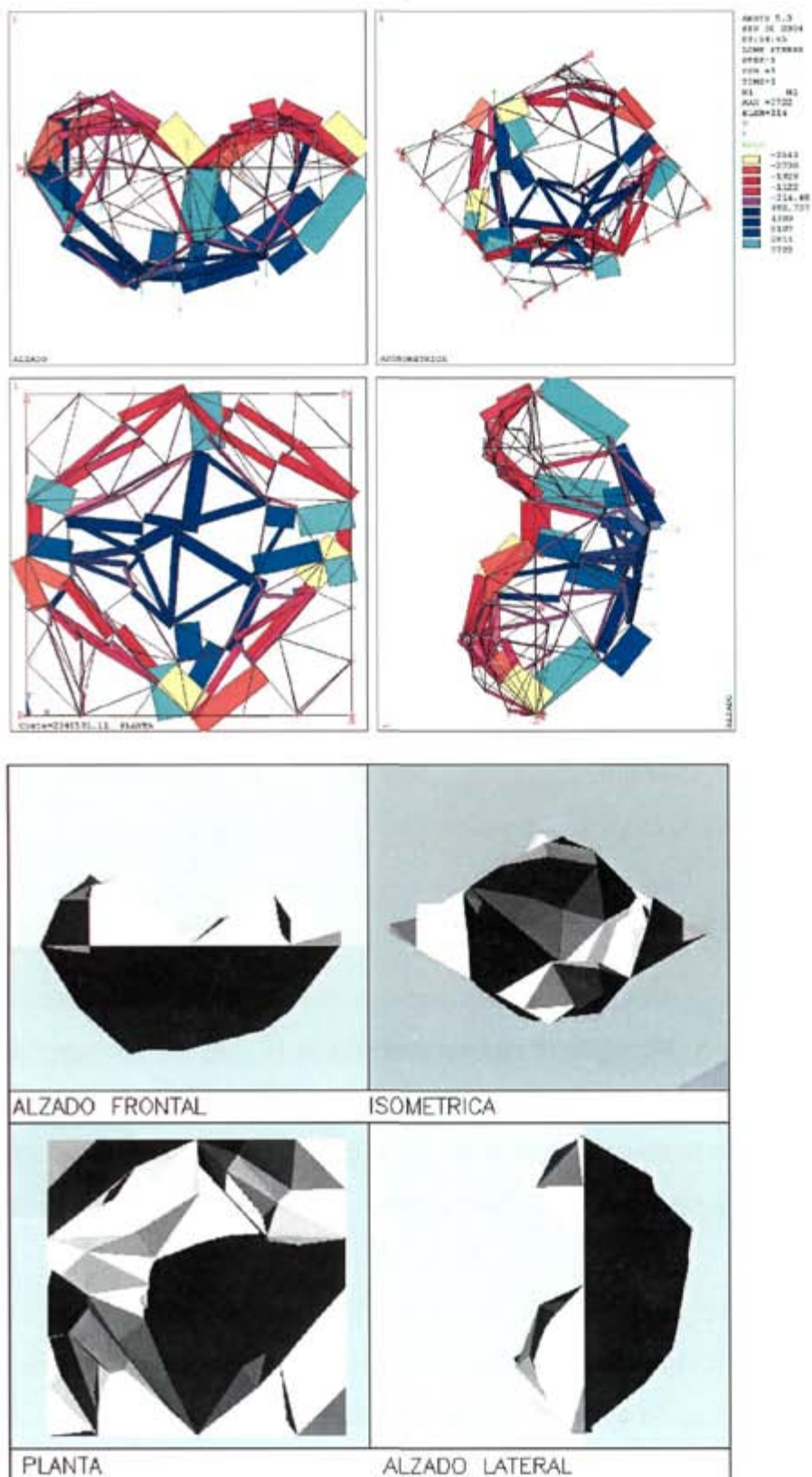
	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	70776834	2984151	73760985
$V_s^-$	70776834	3260953	74037787
	141553668	6245104	147798772

tabla 5. 26: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 85 nudos, base cuadrada.

Según los valores de  $V_s^=$  y  $V_s^{||}$  de la tabla 5. 26 y mediante una relación afín según la fórmula (4.14) el canto debería aumentar de 11.11m a 52.89m para reducir el volumen estructural en un 60%.

#### 5.7.6 Solución con $l_{max}=30\%$ y recinto completo

Con barras más cortas y recinto completo la solución encontrada es la que se muestra en la figura 5. 26. En los casos de planta cuadrada la solución debe adaptarse a la forma de la base. Se puede ver en el diagrama de solicitaciones el funcionamiento de la estructura que consiste en una serie de cuatro sistemas arco (rojos y anaranjados) y catenaria (azules), cada una salvando luces cortas uniando apoyos en los centros de los lados del cuadrado. Los arcos se distinguen de una forma más clara mientras las catenarias se entrelazan entre sí. Este sistema provoca una forma que consiste en montículos en las esquinas y un gran valle en el centro.



Analizando el desglose del volumen estructural que aparece en la tabla 5. 27 ,se observa que la disposici3n de los apoyos horizontales no influye en le reparto del trabajo. Al observar como se reparte el trabajo en desplazamientos de carga vertical se observa que en este caso son mayores las tracciones, quiz3s debido al gran valle central. Como en otros casos al comparar el trabajo horizontal con el vertical, ( $V_s^=$  y  $V_s^{||}$  ) se ve que es mayor el primero de ellos, una caracter3stica de los dise1os 3ptimos es que estos valores son iguales, en esta ocasi3n el proceso no ha logrado igualarlos debido a la limitaci3n de las longitudes de las barras. Mediante una transformaci3n afin seg3n la f3rmula (4.14) se puede conseguir una estructura que cumpla con esta caracter3stica, el factor de proporci3n debe ser  $\kappa=1.41$ . De esta manera se aumentar3a el canto total de 59.43m a 84m, y se reducir3a el volumen estructural en un 5.7%

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	782027	532751	1314778
$V_s^-$	782027	251785	1033812
	1564054	784536	2348590

tabla 5. 27: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=30\%$ , recinto completo

5.7.7 Soluci3n con  $l_{max}=30\%$  y recinto positivo

Cuando la soluci3n se debe restringir al recinto positivo la forma encontrada es la que aparece en la figura 5. 28, repite el comportamiento de la soluci3n an3loga con barras m3s cortas. La soluci3n es una c3pula de barras a compresi3n y, para resistir los empujes que produce, necesita un anillo a tracci3n, (azul ciano). En la interstici3n entre forma circular del anillo y cuadrada de la base aparece una forma casi plana y a la misma cota.

En la figura 5. 27 se puede observar la deformada de esta soluci3n, solo se ha incluido la vista en planta porque en el resto los desplazamientos eran insignificantes y no aportaba ninguna informaci3n adicional. En esta planta se aprecia como debido al trabajo de este anillo los apoyos centrales de cada lado se desplazan hacia fuera.

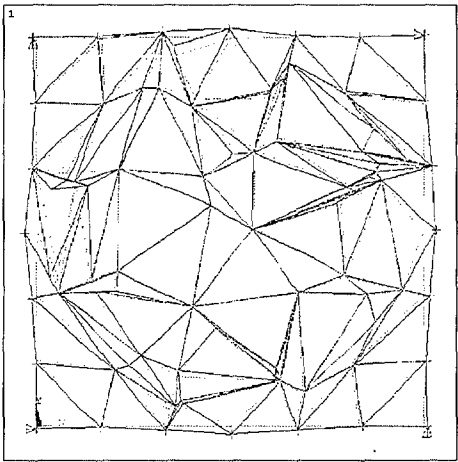


figura 5. 27: Deformada: vista en planta

Igual que suceda en las soluciones de base circular, aparece alguna plegadura en direcci3n radial que rigidiza la superficie. Esto se aprecia mejor en la imagen con sombras.

El desglose del trabajo estructural se muestra en la tabla 5. 28, la disposici3n de los apoyos horizontales es tal que no influyen en el reparto al ser  $Vs^{++} = Vs^{--}$ , mientras que el trabajo vertical es mayor el de compresi3n en una proporci3n de m3s de 13 veces el de tracci3n. La relaci3n entre el trabajo por traslados de carga en horizontal y vertical, indican, seg3n la f3rmula (4.14) que la soluci3n puede ser mejorada. Mediante una transformaci3n afin con  $\kappa=1.37$  se consigue aumentar el canto de 42.29m a 58.06 y reducir el volumen estructural total en un 4.8%.

	$Vs^{+}$	$Vs^{+}$	$Vs^{+}$
$Vs^{+}$	958549	73869	1032418
$Vs^{-}$	958549	943315	1901864
	1917098	1017184	2934283

tabla 5. 28: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=30\%$ , recinto positivo

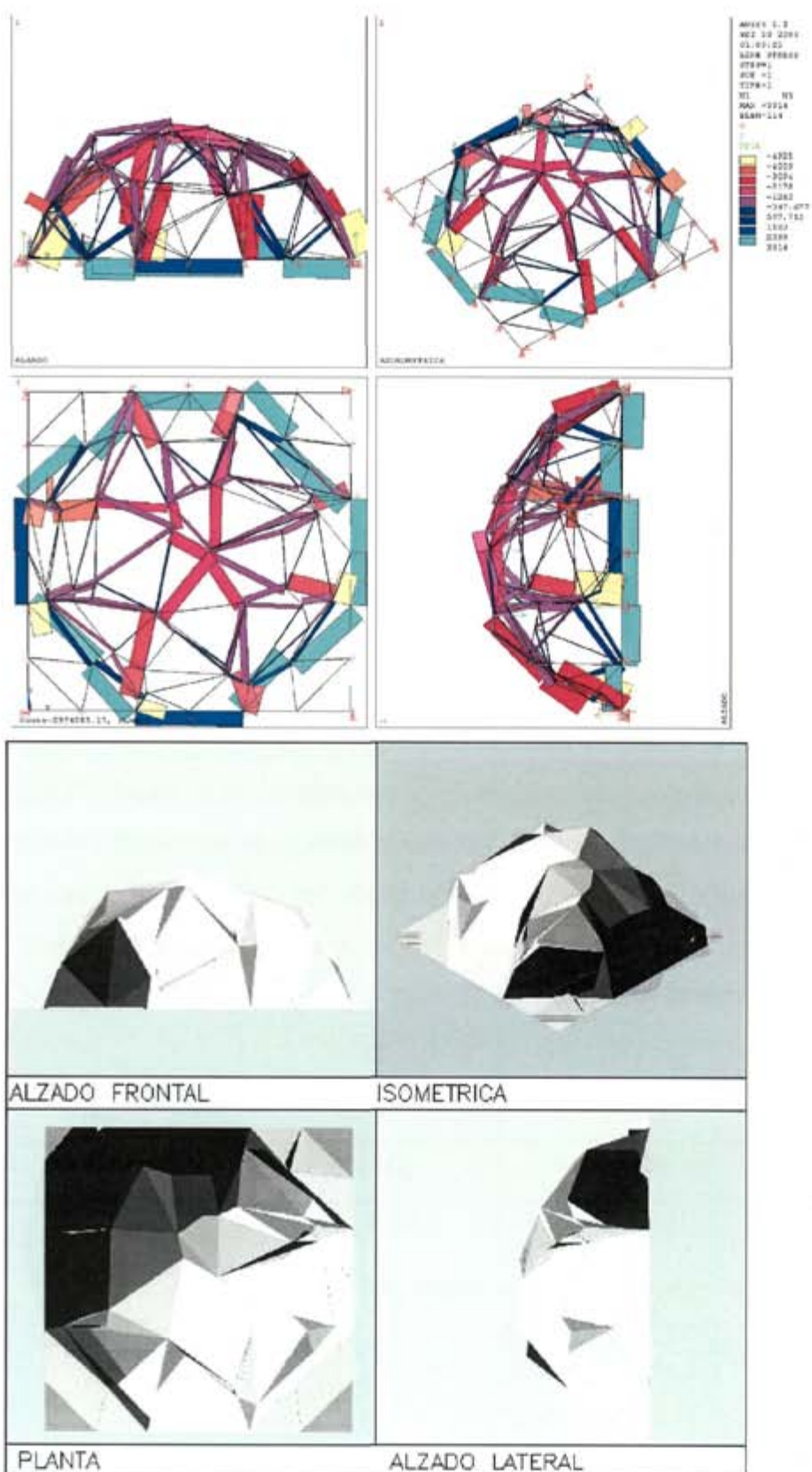


figura 5. 28: Solución para  $L_{max}=30\%$ , recinto positivo,  $V_s 2.934 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

5.7.8 Resumen de resultados

En la tabla que se muestra a continuación se muestran los resultados obtenidos comparando paralelamente las soluciones de recinto completo y recinto positivo, salvo para el 20% de la luz que solo se ha estudiado el caso de recinto positivo. Se indican los valores de volumen estructural ( $V_s$ ) y esbeltez ( $l/h$ ).

Cuadrada	Recinto Completo		Recinto Positivo	
	$V_s$	$l/h$	$V_s$	$l/h$
80% (80m)	1.161 e06	$100/77.26 = 1.29$	1.345 e06	$100/54.07 = 1.85$
40% (40m)	3.002 e06	$100/40.11 = 2.49$	3.649 e06	$100/39.38 = 2.54$
30% (30m)	2.349 e06	$100/59.43 = 1.68$	2.934 e06	$100/42.29 = 2.36$

tabla 5. 29: Resumen de resultados.

Para ver como se ha ido reduciendo la carga aplicada directamente en los apoyos, o lo que es lo mismo, aumentar la carga real soportada, se ha elaborado la tabla 5. 16 que se muestra a continuación:

	CARGA TOTAL (kN)	Recinto completo CARGA EN LOS APOYOS %	Recinto positivo CARGA EN LOS APOYOS %
INICIAL	44.983 e03	-	30
80% (80m)	44.983 e03	73	69
40% (40m)	44.983 e03	34	33
INICIAL	44.940 e03	-	16
30% (30m)	-	26	24

tabla 5. 30: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos.

De nuevo se observa como con grandes longitudes de barra las soluciones aumentan rápidamente la carga aplicada en los nudos variables, esto ayuda a reducir la función objetivo.



### 5.8 Ejemplos de base cuadrada con apoyos puntuales

Para estudiar este caso se ha tomado como referencia la lámina ideada por Heinz Isler para una piscina cubierta en la ciudad de Brugg, en Suiza, (figura 5. 29). La estructura cubre un área de 35x35m, está realizada de hormigón armado, sin vigas de borde. La forma se ha obtenido con el principio de telas colgadas.

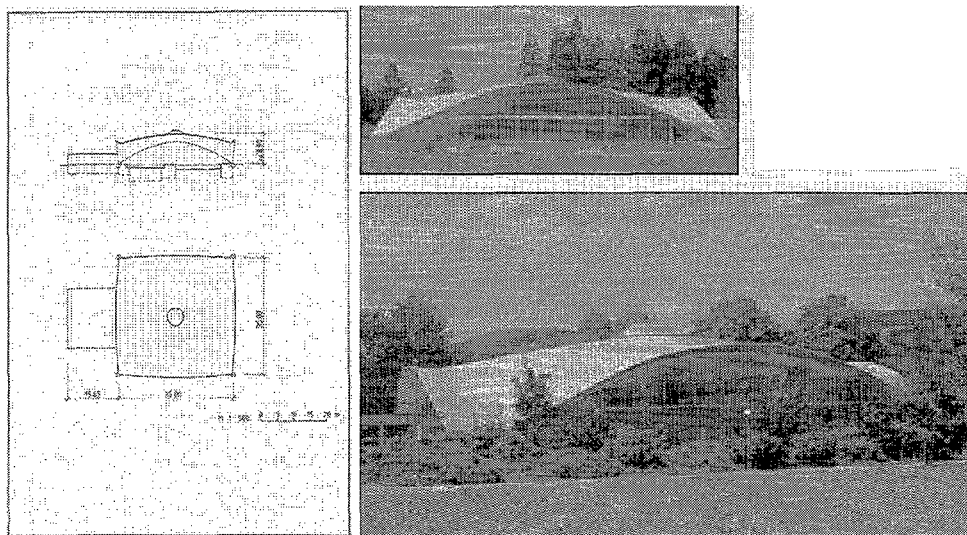


figura 5. 29: Piscina cubierta en Brugg (Suiza), de Heiz Isler, (Ramm, 1989)

Partiendo de la estructura real se ha creado un modelo de barras en una capa y nudos articulados, se muestra el modelo en la figura 5. 30 abajo. Para ello se ha cambiado las dimensiones de la estructura con el fin de que tenga las mismas que los ejemplos anteriores de base cuadrada con apoyo continuo en el borde y poder comparar las soluciones, así se cubre un área de 100x100m.

Se ha procedido al análisis de esta configuración, a falta de una información más precisa se ha tomando su valor de volumen estructural como una referencia inicial. Los resultados del análisis se pueden ver en la figura 5. 30 arriba. Posteriormente se ha procedido al recocido de la misma únicamente para recinto positivo como se puede ver a continuación.

En este caso no hay grandes posibilidades para establecer los apoyos, los cuatro nudos de cada esquina están coaccionados en las tres direcciones de los ejes, lo que da 48 bielas, son 113 nudos y 292 elementos por lo que solo sobra una biela de sustentación. Esta configuración es internamente isostática y solo tiene un vínculo exterior redundante.

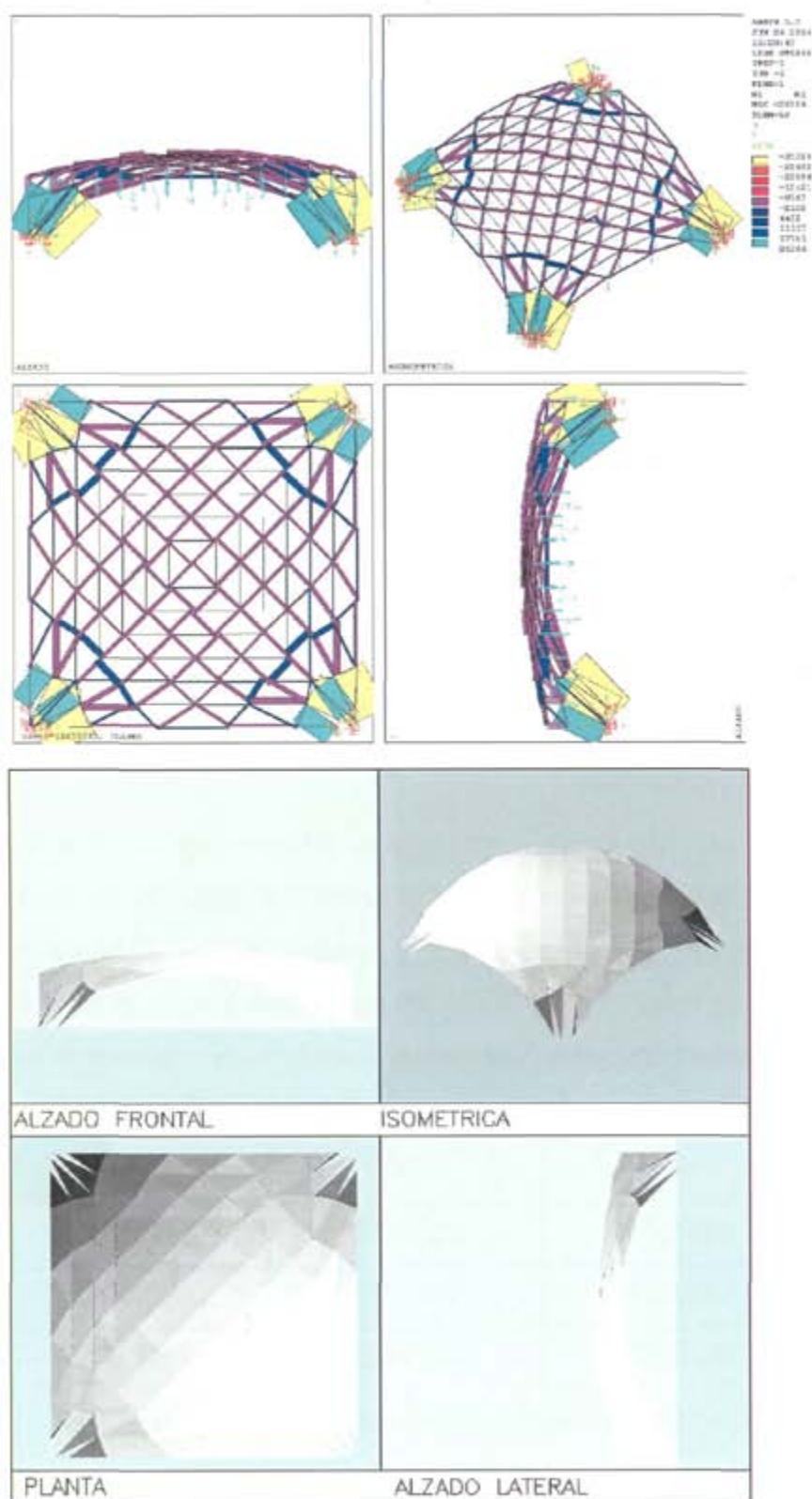


figura 5. 30: Solución inicial de 112 nodos, base cuadrada,  $V_s = 18.640 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

El desglose del trabajo interno de la estructura se puede ver en la tabla 5. 31. Conocidos estos valores, a priori se puede afirmar que mediante una transformaci3n afn con  $\kappa=1.66$  se obtendrfa una estructura de 42.50m de canto y un volumen estructural de 16489660 kN.m., es decir, reduci3ndolo en un 13%. Esto implicarfa unicamente un cambio de geometrfa y no de topologfa de la estructura estudiada.

	$V_s^-$	$V_s''$	
$V_s^+$	3778639	2056652	3835291
$V_s^-$	9886668	2917773	12804443
	13665307	4974426	18639733

tabla 5. 31: Volumen estructural desglosado, soluci3n inicial.

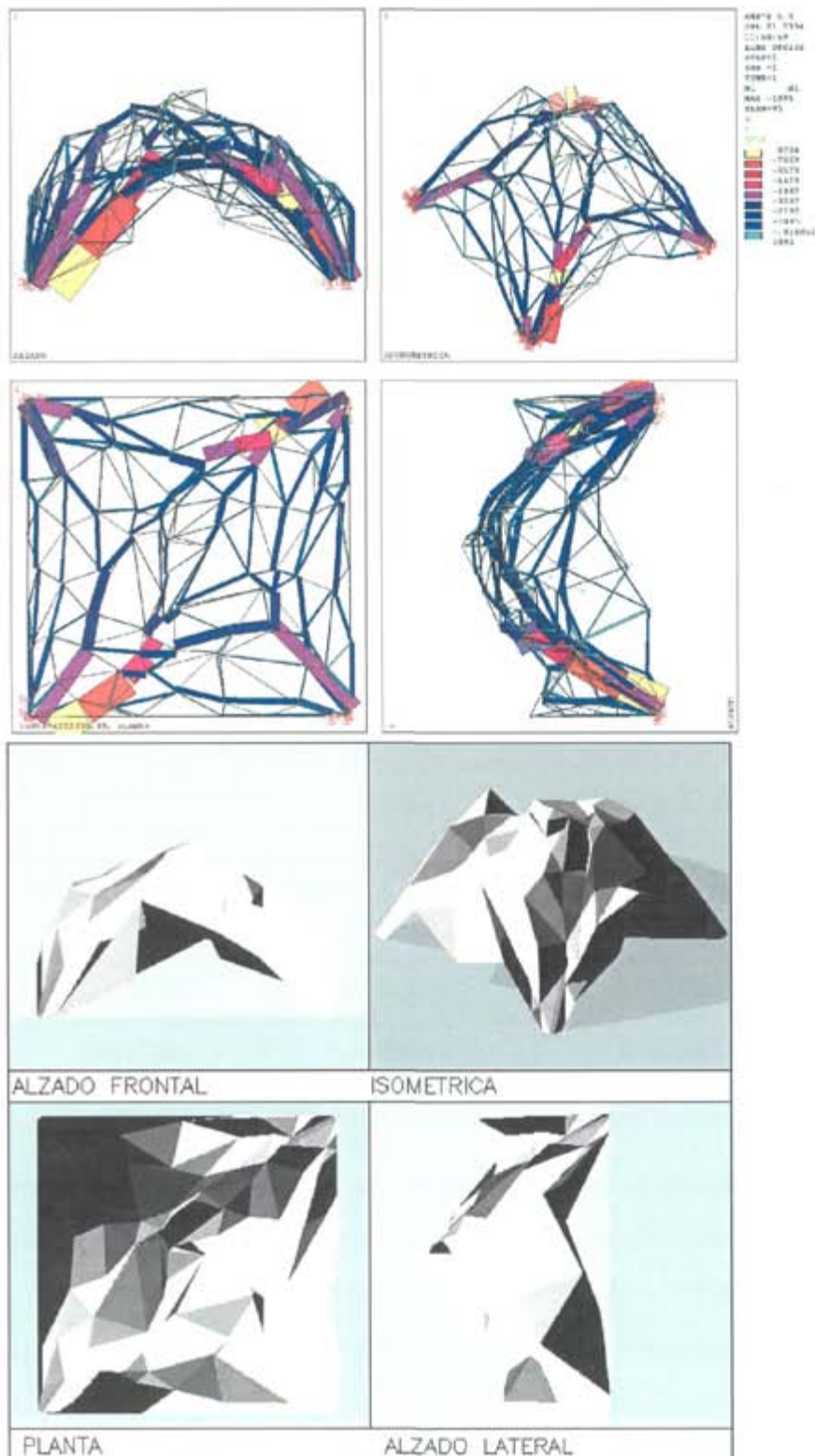
La carga total es de 44.950 e03 kN, de los cuales solo el 4% est3 aplicado directamente en los apoyos. Debido a la configuraci3n de la estructura inicial se cuenta con los apoyos horizontales por lo que  $V_s^{++}$  no ser3 igual a  $V_s^-$  . Al estar en recinto positivo es mayor el trabajo a compresi3n.

En esta ocasi3n no se est3n teniendo en cuenta el esfuerzo que se llevan los apoyos, para poder considerarlo aunque sea fuera del proceso se supondr3 la existencia de unos tirantes que uniesen la base y se llevasen la componente horizontal de las reacciones, lo que supone un trabajo de 5.790 e06 kN.m. De esta manera la tabla de desglose del volumen de estructura queda ligeramente transformada adquiriendo los siguientes valores:

	$V_s^-$	$V_s''$	
$V_s^+$	9168656	2056652	11225308
$V_s^-$	9886668	2917773	12804441
	19055324	4974425	24029749

tabla 5. 32: Volumen estructural desglosado, soluci3n inicial incluyendo tirantes.

Se puede ver que de esta manera casi se igualan los valores de  $V_s^{++}$  y  $V_s^-$ .

5.8.1 Solución con  $l_{max}=30\%$  y recinto positivofigura 5. 31: Solución para  $L_{max}=30\%$ , recinto positivo,  $V_s=4.223 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

En esta ocasión solo se ha estudiado la estructura para una longitud máxima de barra, 30%. Se comparará la solución inicial directamente con la obtenida en recinto positivo al tratar de dar respuesta al mismo problema.

En líneas generales, al comparar la solución obtenida por medio del recocido simulado y la estructura inicial, se observa que la primera adopta una forma de superficie rugosa con múltiples plegaduras. Estas plegaduras dotan a la solución de mayor rigidez a la flexión local y ayuda a reducir considerablemente el volumen estructural de la solución, más de lo que cabía esperar al principio.

Por otra parte la estructura inicial tiene características de una configuración óptima para un reparto uniforme de tensiones mientras, con la nueva, las tensiones se concentran en unos pocos elementos, unas series de arcos entrelazados. En la figura 5. 31 se aprecia claramente el cambio producido en la topología.

La carga aplicada en los nudos apoyados no varía, permaneciendo en el 4%. El canto total ha aumentado de 25.60 a 60.21 mientras los arcos del contorno han pasado a tener una flecha de 18.58 a tener un valor comprendido entre 23.41 y 43.92. Como se aparecía en el alzado lateral aparece un pliegue bastante pronunciado en el borde que hace que no sea necesaria una viga de borde.

	$V_s^-$	$V_s^{II}$	
$V_s^+$	132839	83845	216684
$V_s^-$	2412799	1593116	4005915
	2545638	1676961	4222600

tabla 5. 33: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=30\%$ , recinto positivo

Observando los valores de la tabla 5. 33 se aprecia, al igual que en otros casos, que se trata de un diseño de recinto positivo por lo que es mayor el trabajo a compresión que el de tracción, la relación  $V_s^{II} / V_s^{+II} = 19$ , mucho mayor que en otros ejemplos.

En cuanto a la descomposición del trabajo realizado en traslados de carga en horizontal, destacar que las reacciones horizontales de los apoyos colaboran al disminuir la componente de tracciones. Si se dispusiese unos tirantes para computar se trabajo,

éste sería de 2.405 kN.m que al sumarlo en la tabla daría los valores que aparecen en la tabla 5. 34. Este valor es menos de la mitad del original.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	2534221	83845	2618066
$V_s^-$	2412799	1593116	4005915
	4947020	1676961	6623981

tabla 5. 34: Volumen estructural desglosado incluidos los tirantes

Con estos nuevos valores se aprecia la diferencia entre  $V_s^=$  y  $V_s^{||}$  , lo que indica que el volumen estructural se podría reducir más, mediante una transformación afín donde  $\kappa=1.72$ . Esto requiere barras más largas, y el canto llegaría a 103.41m. De esta manera el volumen estructural se reduciría en un 13%. Este cambio también implica que el trabajo de las reacciones horizontales se reduzcan y, aunque no interviene en el computo general si implica una reducción del coste en la cimentación.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos

	Recinto Positivo		
	$V_s$	$l/h$	$f$
Inicial	18.640 e06	$100/25.61 = 3.905$	18.58m
Lmax20	4.223 e06	$100/60.21 = 1.661$	de 23.41m a 43.92m

tabla 5. 35: Resumen y comparación de resultados.

5.9 Ejemplos de base mixta

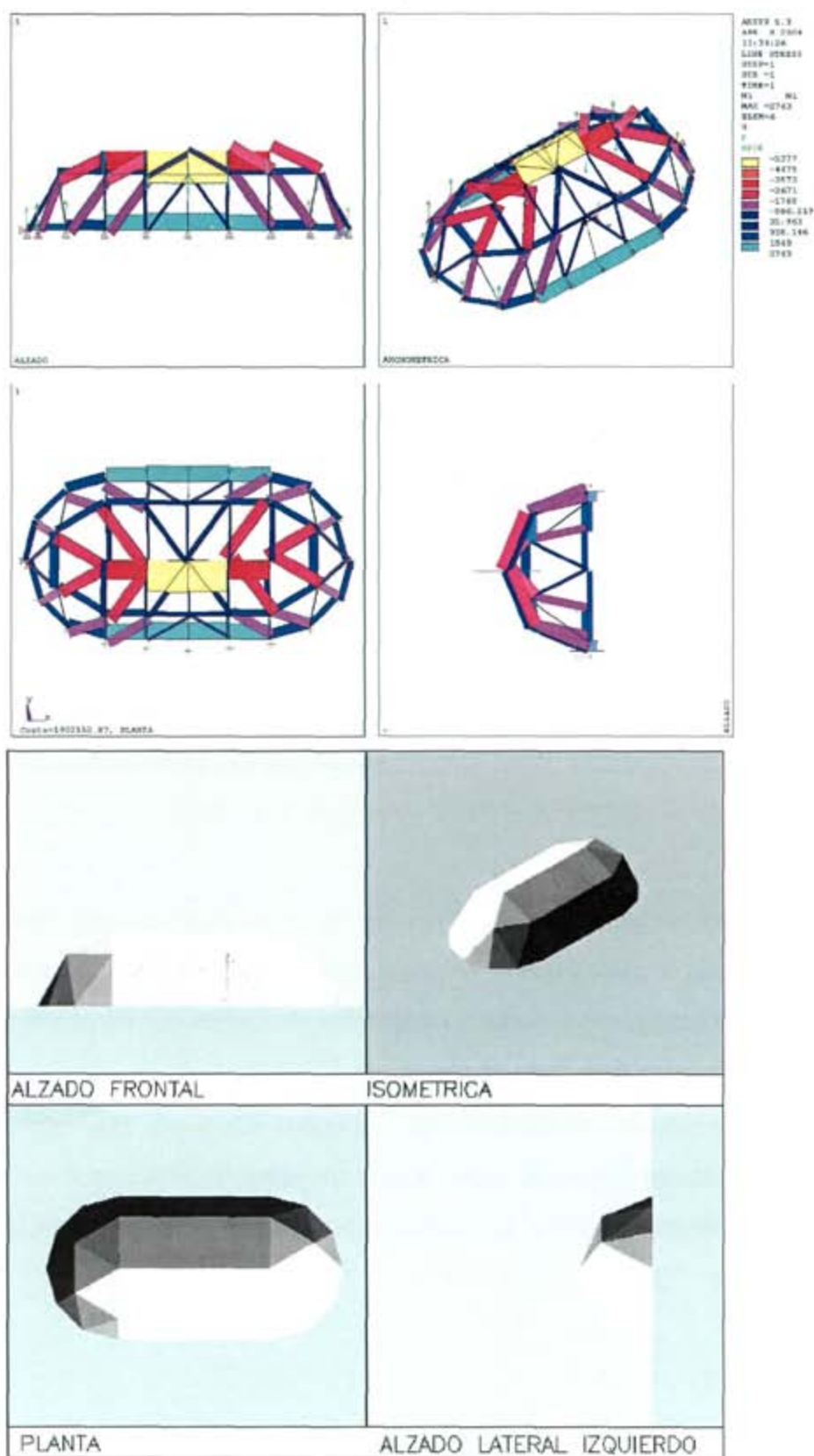
Se estudia en este apartado una configuraci3n de base que combina los lados rectos con la semicircunferencia en los extremos con el fin de estudiar el comportamiento ante una situaci3n mixta. En esta ocasi3n se mantiene la luz m3s larga salvada en 100m mientras que la luz corta pasa a ser la mitad, 50m. La proporci3n resultante es de 2/1. De nuevo se ha estudiado para diferentes longitudes m3ximas,  $l_{max} = 80m$ , 40m y 20m, que corresponden al 160%, 80% y 40% de la luz corta, para los dos primeros casos se ha elegido una estructura de 39 nudos (figura 5. 32). La configuraci3n con mayor numero de nudos, 54, ( figura 5. 39), se utiliza para analizar el comportamiento al cambiar 3nicamente el n3mero de nudos por ello se vuelve a estudiar la condici3n de  $l_{max} = 80\%$ , y posteriormente para  $l_{max} = 40\%$ ,

La configuraci3n inicial de 39 nudos tiene 94 barras, por lo que son necesarias como m3nimo 23 bielas de sustentaci3n. Los apoyos son los siguientes: todos los nudos del contorno tiene una coacci3n vertical lo que da 20 bielas, las tres que faltan ser3n para impedir el movimiento como s3lido r3gido del conjunto y se ha decidido aplicarlas en los dos nudos que salvan la luz m3s larga, a una distancia de 100m, colocando dos que impiden el desplazamiento seg3n el eje Y m3s una seg3n el eje X. De esta manera no influyen los apoyos horizontales en la estimaci3n del volumen estructural al no aparecer reacciones horizontales.

El desglose del volumen estructural inicial es el que se indica en la tabla 5. 36, la carga total es de 19.364 e03 kN, de los cuales el 21% se aplica en los nudos apoyados y el 79% en los nudos variables.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	741794	57522	799316
$V_s^-$	741794	361043	1102837
	1493588	418565	1902153

tabla 5. 36: Volumen estructural desglosado, soluci3n inicial, 39 nudos, base mixta.





A partir de los valores de la tabla 5. 36 se puede afirmar que la función objetivo se puede mejorar realizando una transformación afín con proporción  $\kappa=1.88$  (fórmula 4.14). El canto inicial de 25m pasaría a ser de 47.07m. El volumen estructural después de esta transformación sería 1.581 e06 kN.m por lo que es habría reducido en un 17%.

#### 5.9.1 Solución con $l_{max}=160\%$ y recinto completo y positivo

Las soluciones para recinto completo (figura 5. 33) y para recinto positivo (figura 5. 34) son muy similares. Al permitir que las barras puedan ser mayores a la luz más corta, (50m), el proceso evoluciona hacia la solución falsamente mínima en la que las cargas están muy cerca de los apoyos, por lo tanto se evita el problema real. La estructura queda reducida, en el caso del recinto positivo, a unas pocas barras trabajando a compresión llevando la carga directamente a los apoyos. De este modo se busca que la trayectoria que siguen las cargas sea el más corto posible. Debido a la no perfecta verticalidad sobre el apoyo aparecen unas ligeras tracciones en la zona curva de la base, a modo de segmento de anillo. La superficie creada parece perseguir una serie de fragmentos de pirámides yuxtapuestas. Estas soluciones aportan una característica que se repetirá en los próximos procesos y es el ritmo con el que se repite la estructura, en este caso de pirámides.

Para recinto completo se sigue la misma ley de pirámides, en este caso combinando las que ocupan la parte superior del espacio con la inferior. Y del mismo modo que antes aparecían unos pocos soportes a compresión ahora aparecen los mismos también a tracción, cuando bajan de la línea de apoyo.

El canto total alcanzado es prácticamente igual en ambas soluciones. Hay mayor proporción de carga directamente aplicada en los nudos apoyados, el 39% con recinto completo y el 48% con recinto positivo, no es tanto como se podía haber esperado porque el mecanismo para evitar el problema es otro.

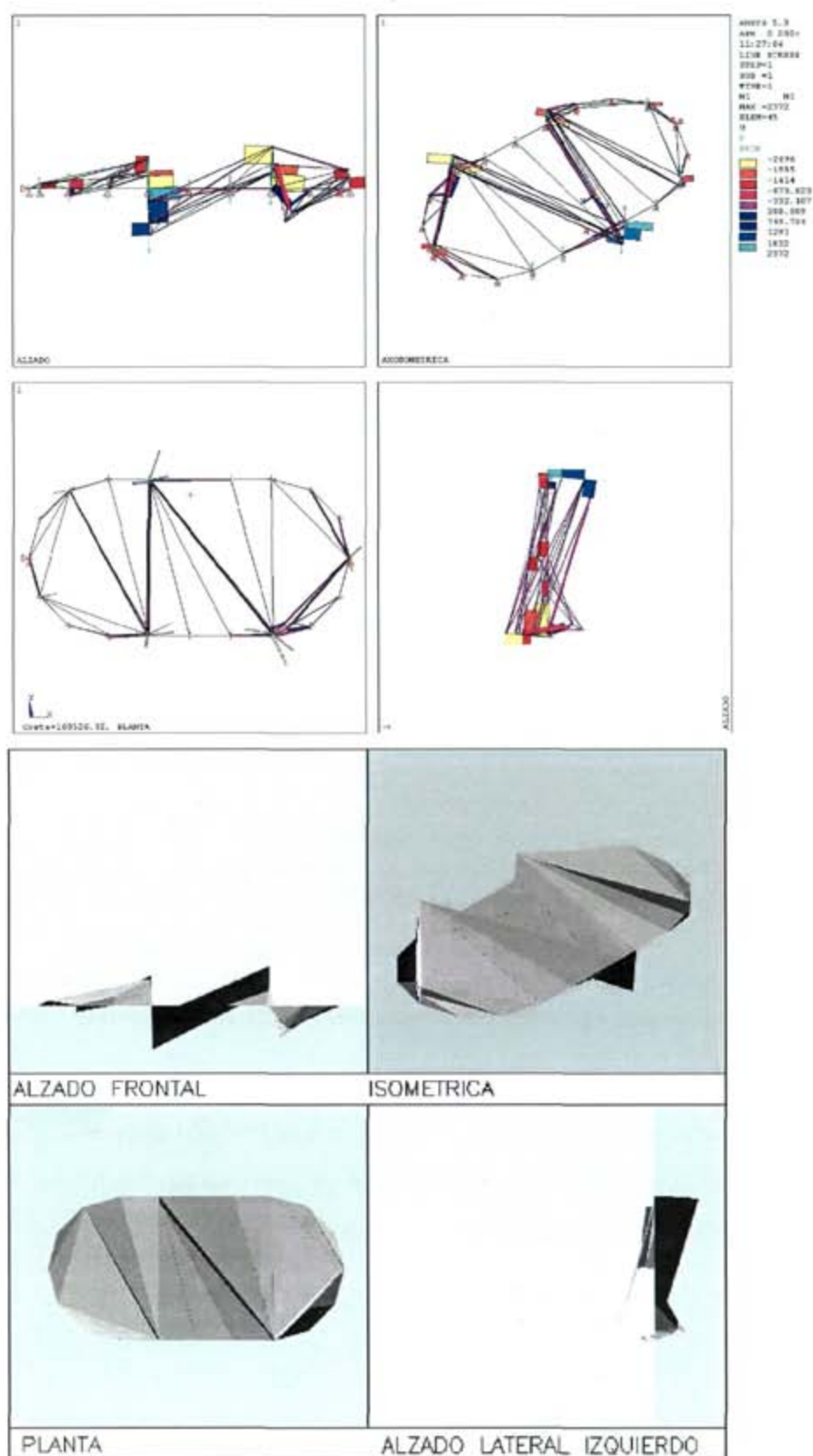


figura 5. 33: Solución para Lmax=160%, recinto completo Vs=0.169 e06kN.m

A continuación se aporta el desglose de volumen estructural para recinto completo que aparece en la tabla 5. 37 y para recinto positivo en la tabla 5. 38.

	$V_s^-$	$V_s''$	
$V_s^+$	34355	32282	66636
$V_s^-$	34355	67535	101890
	68710	99816	168526

tabla 5. 37: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=160\%$ , recinto completo.

Observando los desgloses de volumen estructural en las tablas tabla 5. 37 y tabla 5. 38 se aprecia en ambos casos la no influencia de los apoyos horizontales, al ser iguales  $V_s^{+-}$  y  $V_s^{-+}$ . La diferencia entre  $V_s^-$  y  $V_s''$  indican que se podría reducir el volumen estructural mediante una transformación afín de la estructura con el factor  $\kappa=0.83$  para recinto completo y  $\kappa=0.75$  para recinto positivo, es decir, disminuyendo más el canto en ambos casos, pasando de 27.89m a 23.14m en el primer caso y de 28.30m a 21.30m en el segundo.

	$V_s^-$	$V_s''$	
$V_s^+$	49705	19859	69565
$V_s^-$	49705	153480	203185
	99410	173338	272748

tabla 5. 38: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=160\%$ , recinto positivo.

Como ya se observó al principio estas soluciones no son muy significativas por superar el tamaño de la barra a la luz más corta. Aun así se han incluido estos ejemplos para que se pueda apreciar cómo evoluciona el proceso en general casi sin limitación de las longitudes y por ello justifica la existencia de este límite.

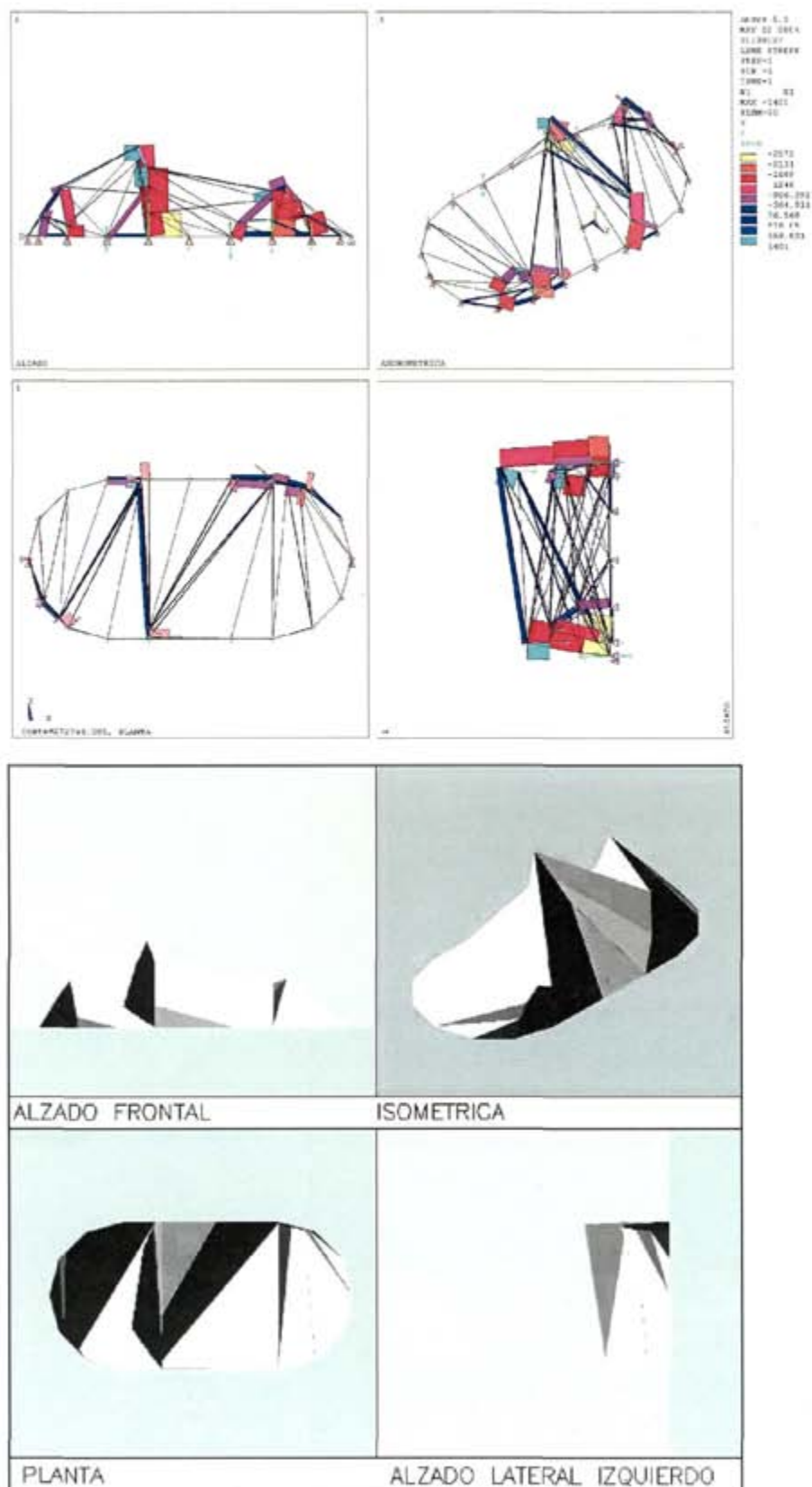


figura 5. 34: Solución para  $L_{max}=160\%$ , recinto positivo  $V_s=0.273 \text{ e}06\text{kN.m}$

### 5.9.2 Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto completo

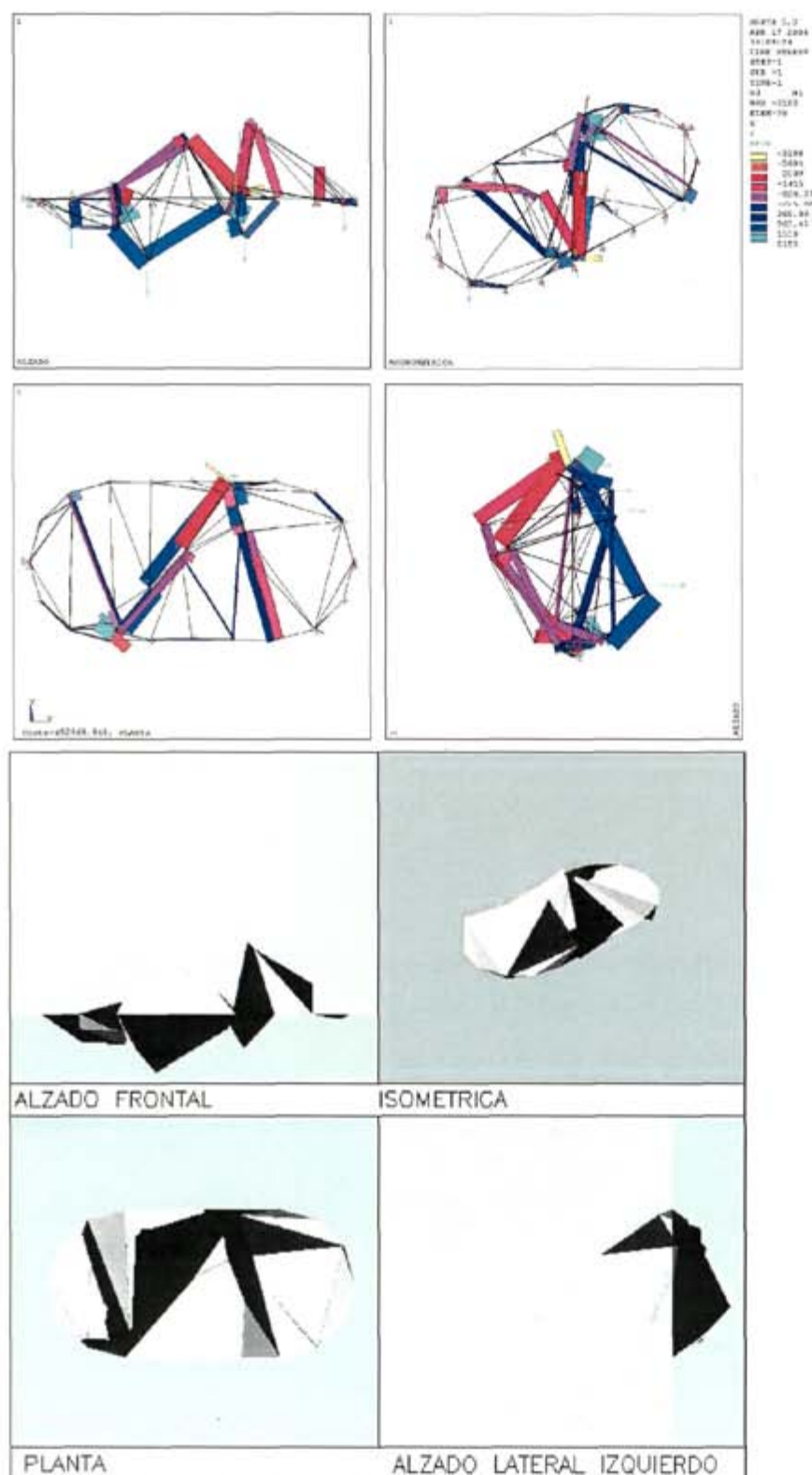


Figura 5. 35: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo  $V_s=0,453 \text{ e}06\text{kN.m}$

Como se puede apreciar en la figura 5. 35, con barras hasta 40m (80%), los nudos ya no pueden acercarse tanto a los apoyos por lo que encuentran una situación intermedia. La configuración en general tiende a una serie de estructuras planas tipo arco-catenaria que hacen cambiar la geometría de recinto positivo a negativo sucesivamente a modo de diente de sierra, esto se aprecia mejor en las secciones de la figura 5. 36. La disposición en planta es en forma de zig-zag de manera que se cubre la totalidad de la superficie.

En la figura 5. 35 se distinguen las barras comprimidas, en rojo, de las traccionadas, en azul. El arco contrarresta con la catenaria los empujes generados, de esta forma no es necesaria la colaboración del anillo de la base, que, por otra parte, debido a las zonas rectas del mismo, su funcionamiento no sería efectivo. Estas estructuras coinciden en los puntos de apoyo y dividen la estructura en una serie de triángulos en planta. De nuevo aparecen otra serie de barras de menor importancia que subdividen el espacio uniendo la estructura principal con los apoyos o entre sí y cuyo esfuerzo axial es pequeño

Para facilitar la comprensión de esta geometría se han incluido en la figura 5. 36 las secciones más significativas, una de ellas longitudinal y las otras dos transversales en dirección de las estructuras arco-catenaria principales se representan en proyección y no en verdadera magnitud para facilitar el reconocimiento de las formas de la figura 5. 35.

La carga aplicada en los nudos de apoyo ha aumentado, respecto de la inicial, hasta un 34%, esto sucede gracias a que las barras aun son bastante largas, lo que colabora en la reducción de la función objetivo.

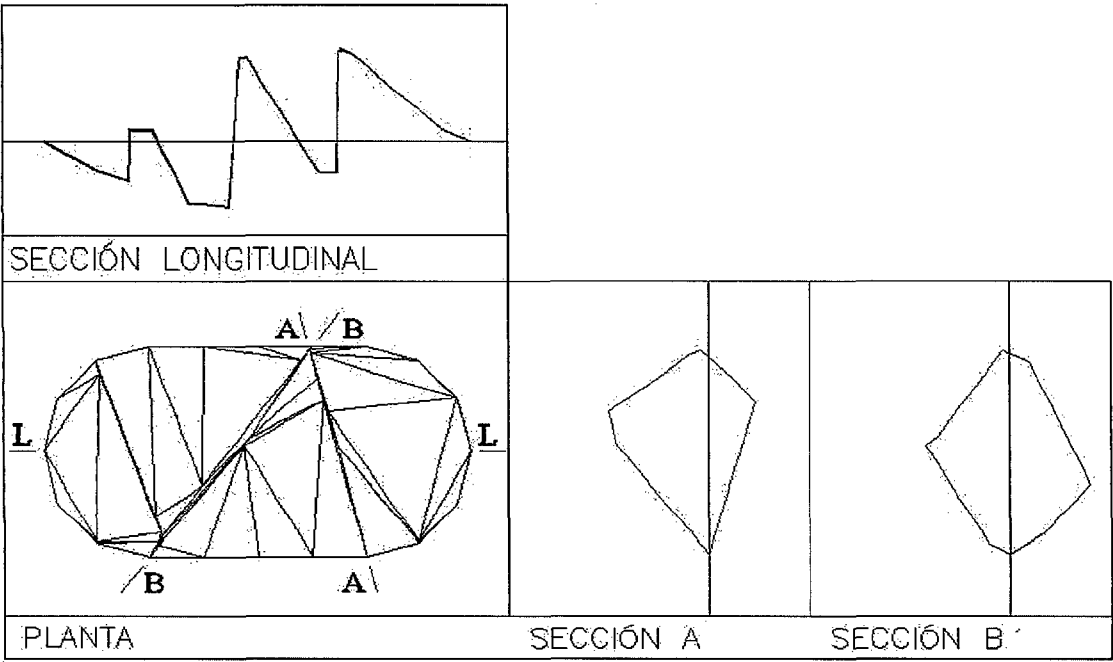


figura 5. 36: Secciones de la solución para recinto completo.

En la tabla 5. 39 se observa que el trabajo de tracción es mayor que el de compresión por lo que una mejora del diseño iría encaminada a igualarlas, en la sección longitudinal de la figura 5. 36 se percibe el equilibrio general de la sección entre recinto positivo y negativo, salvo en la zona de la izquierda donde la estructura está fundamentalmente bajo la línea de apoyos, por eso es algo mayor el termino de las tracciones.

También se advierte la nula influencia de los apoyos horizontales al cumplirse la igualdad  $Vs^{+} = Vs^{-}$ . La diferencia entre el trabajo en traslados de carga horizontal y vertical indica que mediante una transformación afín con  $\kappa= 1.27$  se podría reducir el volumen estructural total. Para ello el canto cambiaría de 41.83m a 54.57m y serían necesarias barras más largas.

	$Vs^{-}$	$Vs^{II}$	
$Vs^{+}$	140143	76435	216578
$Vs^{-}$	140143	96249	236392
	280286	172684	452970

tabla 5. 39: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

Realizando esta transformación el volumen estructural se reduciría en un 3% y el desglose quedaría de la siguiente manera:

	$V_{s^=}$	$V_{s^{II}}$	
$V_{s^+}$	110410	96962	207372
$V_{s^-}$	110410	122145	232555
	220820	219107	439927

tabla 5. 40: Volumen estructural desglosado, solución afín para Lmax=80%, recinto completo.

5.9.3 Solución con lmax =80% y recinto positivo

En la figura 5. 38 se observa como esta solución consiste en una serie de arcos que se llevan casi la totalidad del trabajo. Debido a la geometría de la base, no puede contar con el anillo para resistir los empujes, tampoco tiene apoyos horizontales que colaboren, por ello los empujes de los arcos se tienen que compensar unos con otros, de ahí que casi coincidan en el apoyo. De esta manera no se contrarrestan totalmente por lo que también es necesaria la colaboración de los tirantes, por eso aparecen unas barras en la cota del plano de apoyo, o cercanas a él, que hacen la función del tirante del arco, de ahí los fuertes saltos que se aprecian en la sección longitudinal (figura 5. 37).

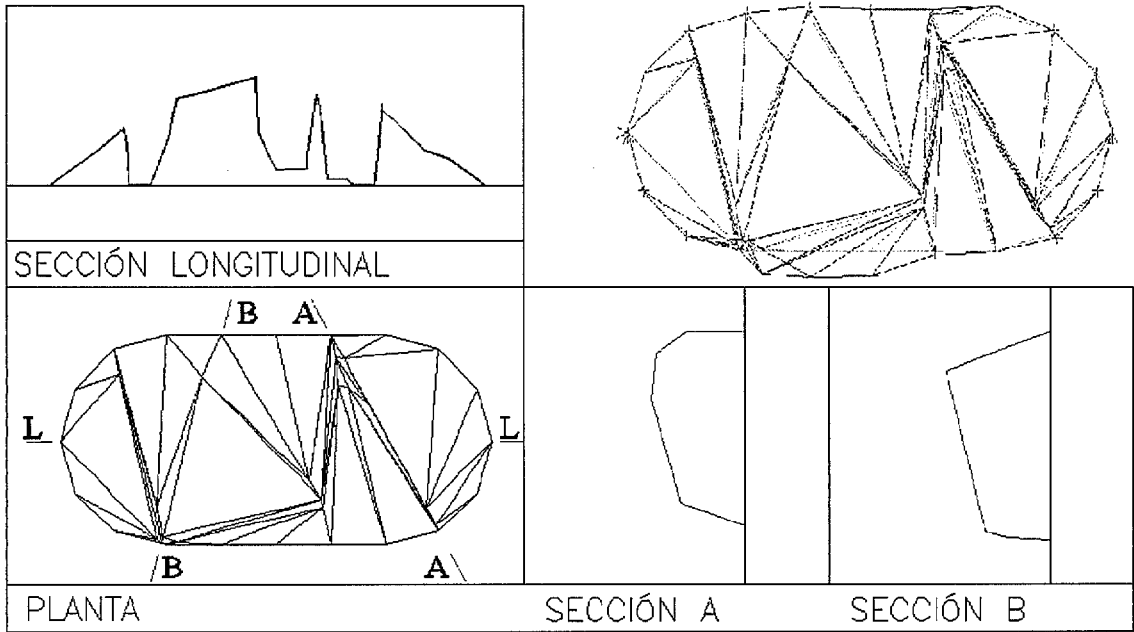


figura 5. 37: Secciones y deformada de la estructura en planta.



Cuando no puede contar con esto y ha de recurrir al “anillo” es a costa de grandes desplazamientos de los apoyos como se puede ver en la deformada de la figura 5. 37.

De nuevo la serie de arcos divide la planta en una serie de triángulos yuxtapuestos. Esto se transforma espacialmente en una serie de pirámides contiguas, creando los altibajos que se pueden ver en la sección. Cuanto mayor sean las superficies de estos triángulos mayor será la carga que vaya directamente a los apoyos, al final la carga aplicada en los nudos apoyados alcanza el 40%. Ocasionalmente aparecen barras a tracción que unen las zonas altas de los arcos con las más bajas.

El desglose del trabajo estructural queda como se aprecia en la tabla 5. 41. Comparando  $V_s^{+=}$  con  $V_s^{=-}$ , se ve que son iguales, lo que apunta a que los apoyos horizontales no colaboran en el reparto del trabajo. En la relación entre  $V_s^{+||}$  y  $V_s^{-||}$ , son mayores las compresiones, en una proporción de 4.5 veces mayor que las tracciones.

	$V_s^{=-}$	$V_s^{  }$	
$V_s^{+}$	140920	47660	188580
$V_s^{-}$	140920	215419	356339
	281840	263079	544918

tabla 5. 41: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.

Por último al comparar los valores del  $V_s^{=-}$  con  $V_s^{||}$ , que no son iguales, lo que advierte que se conseguiría una pequeña mejora de la solución realizando una transformación afin según la fórmula 4.14, donde  $\kappa=1.03$ , es decir a penas cambiaría el canto ligeramente a mayor pasando de 26.13m a 27.05m. El volumen estructural total disminuiría tan solo en un 0.05% pasando a ser de 544602 kN.m.



### 5.9.4 Configuración inicial para $l_{max}=80\%$ y $40\%$

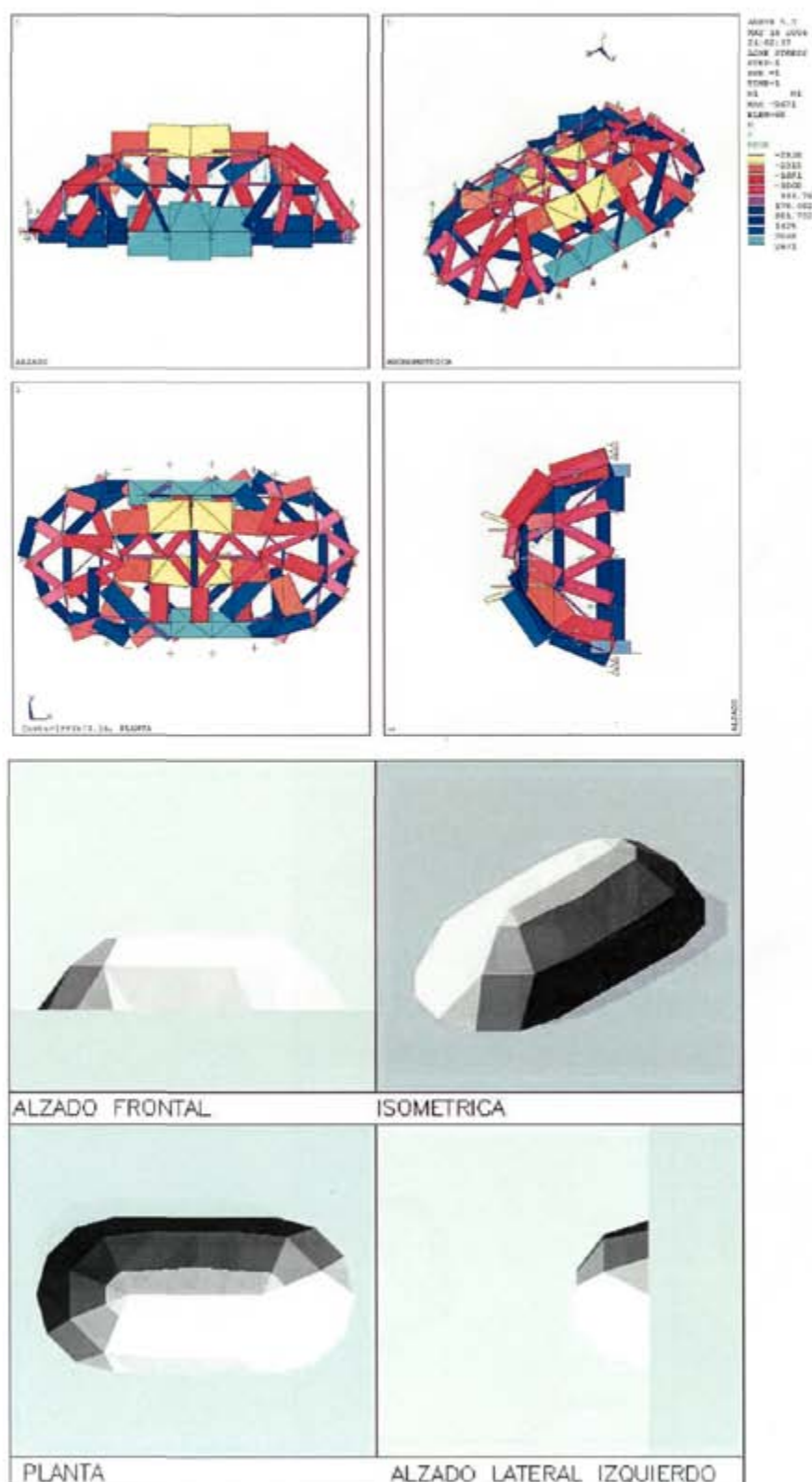


Figura 5. 39: Solución Inicial de 54 nodos, base mixta  $V_s=1.994 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .

Para longitudes de barra del 80% y del 40% se utiliza la presente estructura que salva unas luces de 100m en el sentido largo y 50m en el corto. Tiene un número total de nudos de 54, de los cuales 22 son de contorno apoyado, y 137 barras. Para que sea isostática son necesarias 25 bielas de sustentación que se distribuyen, como en el caso anterior, una vertical por cada nudo de contorno apoyado, las tres que impedirán el movimiento como sólido rígido del conjunto, están situadas en los dos nudos que salvan la luz más larga, colocando dos según el eje Y más una según el eje X.

La carga aplicada en los apoyos es el 18% del total (19.364 e03 kN) mientras que el desglose del volumen estructural se muestra en la tabla 5. 42

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	723760	123324	847084
$V_s^-$	723760	423543	1147303
	1447520	546867	1994387

tabla 5. 42: Volumen estructural desglosado, solución inicial, 54 nudos, base mixta.

A partir de estos valores se puede afirmar que la función objetivo puede mejorar un 11% mediante una transformación afin con proporción  $\kappa= 1.63$  (fórmula 4.14). En este cso el canto de 25m aumentaría a 40.67m.

### 5.9.5 Solución con $L_{max}=80\%$ y recinto completo

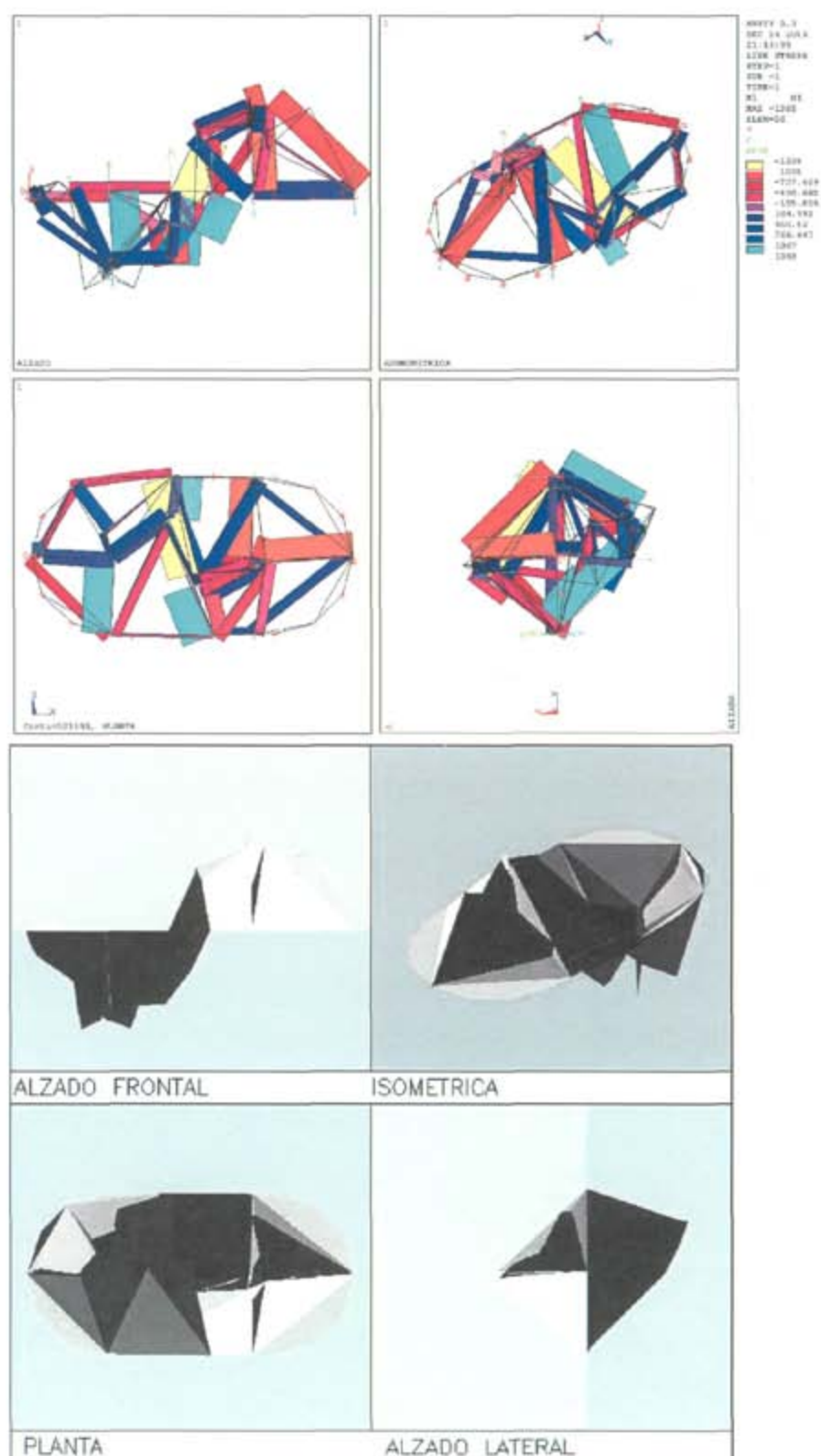


figura 5. 40: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo  $V_s= 0.979 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

La geometría de la solución muestra dos claras zonas en los dos recintos positivo y negativo. Una pareja arco-catenaria facilita el cambio. Cada una de las mitades es una cúpula con ciertas plegaduras que le dan la rugosidad a la superficie. Los empujes provocados se compensan con barras al nivel de los apoyos que hacen la función del anillo, en la zona curva de la base el anillo reduce el numero de lados como en soluciones anteriores.

De nuevo aparecen otra serie de barras fundamentalmente a compresión en recinto positivo y a tracción en el negativo, de esta manera se une la estructura principal con los apoyos .

La carga aplicada en los nudos apoyados ha aumentado respecto de la solución inicial al 40%, mayor que en el caso similar con menor número de nudos.

En la tabla 5. 43 se indica el desglose del volumen estructural. Se aprecia como la componente de tracción y compresión son muy cercanas, y como los traslados de carga horizontales son ligeramente mayores que los verticales, esto indica una posible mejora por medio de una transformación afín en la que  $\kappa$  sea 1.30, de esta manera el canto aumentaría de 59.71m a 77.83m, lo que se traduce en una mejora del 3.41%

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	164298	96252	260550
$V_s^-$	164298	96252	261430
	328596	193384	521980

tabla 5. 43: Volumen estructural, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

También se advierte la nula influencia de los apoyos horizontales al cumplirse la igualdad  $V_s^{+=} = V_s^=$ , condición establecida de partida.

5.9.6 Solución con  $l_{max}=80\%$  y recinto positivo

Aparece una geometría bastante clara de tres pirámides truncadas de manera que en alzado describen arcos rebajados. El canto alcanzado es de 37.25m, lo que da una esbeltez de 1.34. En la figura 5. 41 se muestra la geometría de la solución encontrada



El desglose del trabajo se presenta en la tabla 5. 44. En el trabajo horizontal es igual la componente de tracciones que la de compresiones, mientras en el trabajo vertical es mayor la componente de compresiones, al igual que en las otra configuraciones de recinto positivo. Ante la desigualdad de trabajo horizontal y vertical por medio de luna transformación afin que aumente el canto a 44.05m, lo que produce una esbeltez de 1.13, se consigue una mejora del 1% del volumen estructural. El factor de proporción aplicado es  $\kappa= 1.18$ .

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	191319	71738	263057
$V_s^-$	191319	203307	394626
	382638	275045	657683

tabla 5. 44: Volumen estructural, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.

En este caso la proporción de carga que se aplica en los nudos variables es el 44% del total, es decir que la mayor parte de la carga está aplicada directamente en los nudos apoyados.

5.9.7 Solución con  $l_{max}=40\%$  y recinto completo

Se puede ver el resultado del análisis de esta solución en la figura 5. 42 arriba y la geometría abajo, para facilitar su comprensión se han incluido una serie de secciones en la figura 5. 43. Se confirma la tendencia de los ejemplos anteriores en los que la estructura iba cambiando de recinto positivo al negativo a modo de diente de sierra, aunque parecen distinguirse dos grandes zonas, a la izquierda del modelo en recinto positivo y a la derecha del mismo en negativo, las secciones desvelan los altibajos. Una estructura tipo arco-catenaria facilita el cambio de recinto.



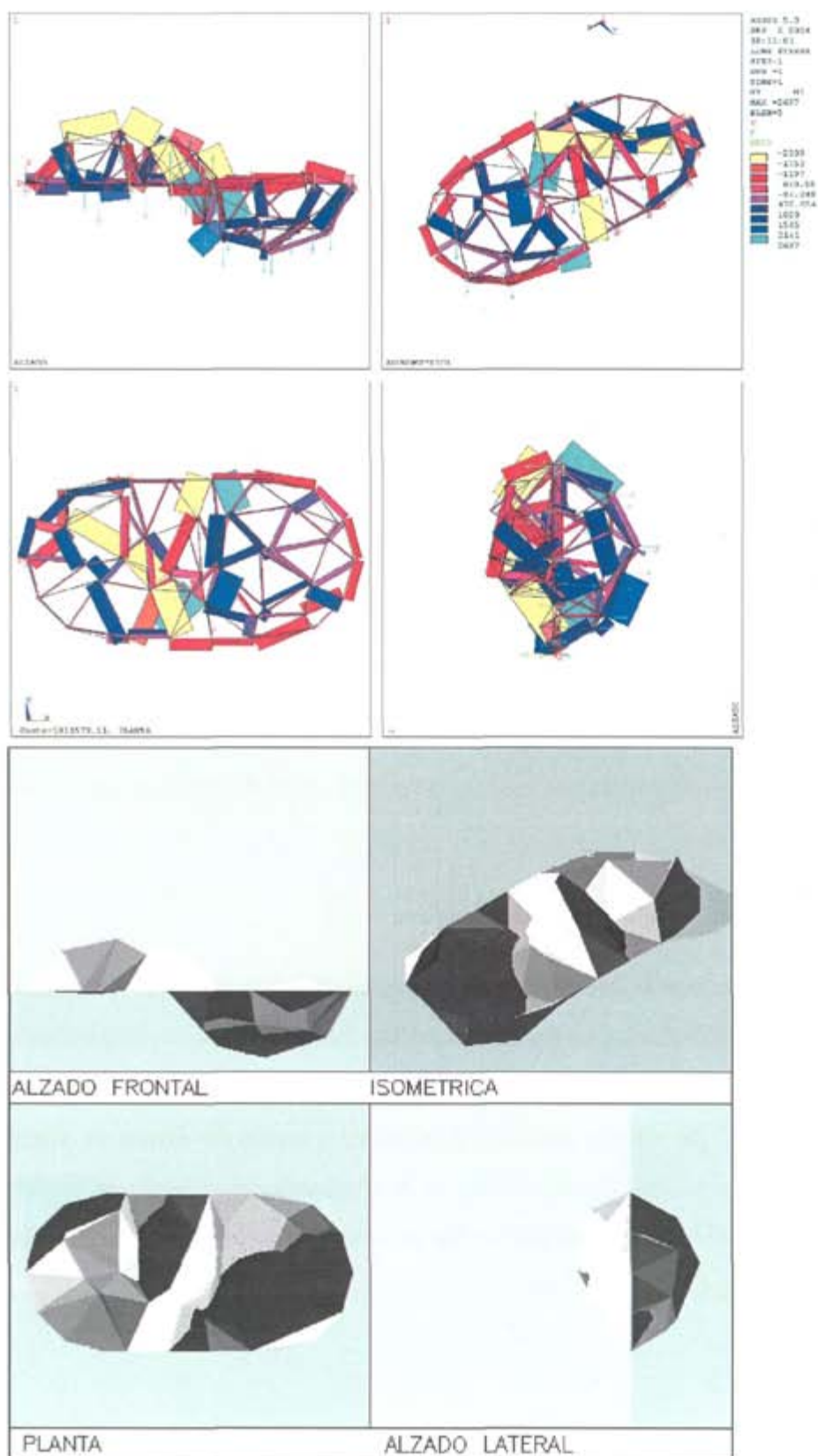


figura 5. 42: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo  $V_s= 0.850 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

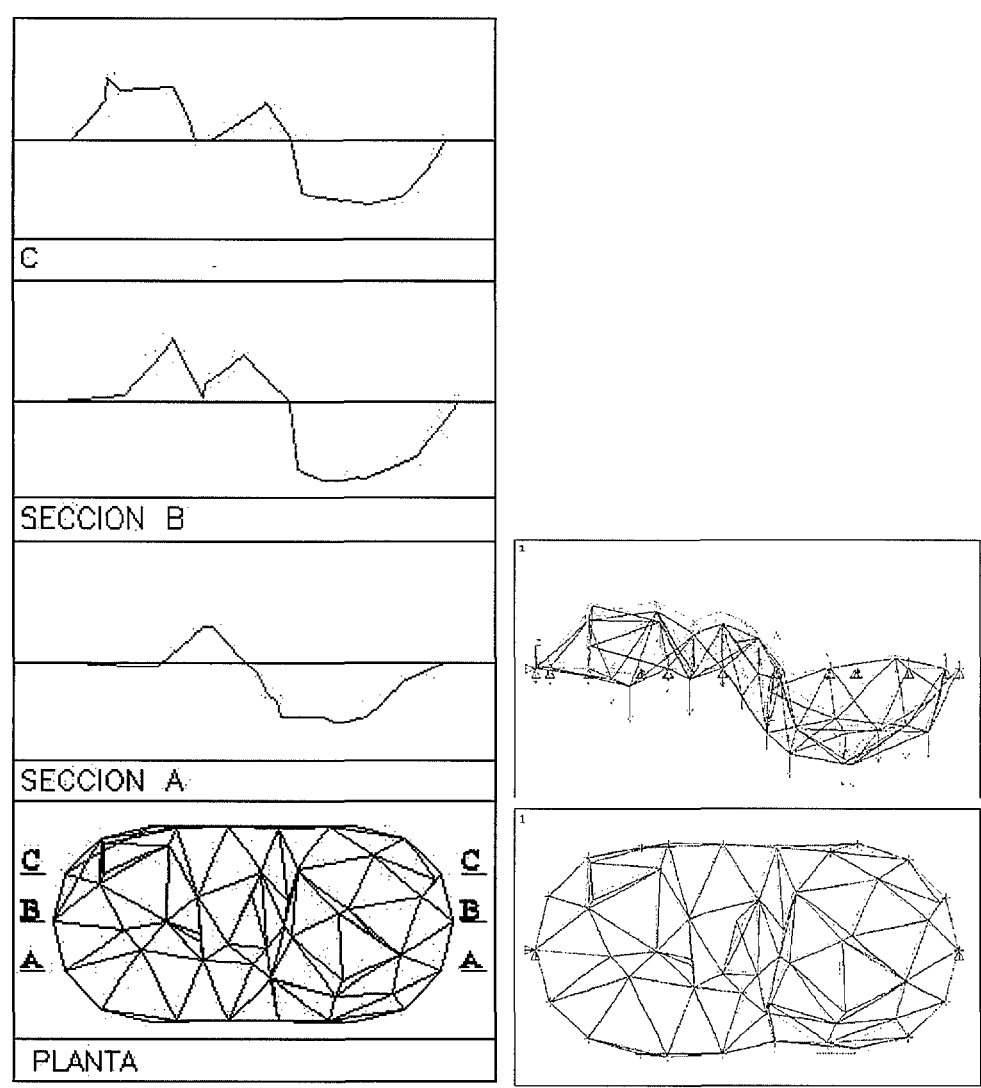


figura 5. 43: Secciones de la solución (izquierda) y deformada (derecha)

En el desglose del volumen estructural que se puede leer en la tabla 5. 45 se observa que no colaboran los apoyos horizontales en la resistencia de los empujes, de ahí que tenga que trabajar el anillo de la base, así aprovecha la forma de semicircunferencia de la base. La carga aplicada en los nudos apoyados es del 28% del total.

	$V_s^+$	$V_s^{II}$	
$V_s^+$	311268	128860	440128
$V_s^-$	311268	98376	409644
	622936	227236	849772

tabla 5. 45: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo

Se puede conseguir una sustancial mejora de la soluci3n por medio de una transformaci3n afin con  $\kappa=1.7$  (f3rmula 4.14). Se aumentar3a el canto de 36.95m a 61.16m y el volumen estructural se reducir3a en un 11.5% hasta 752230 kN.m. Para ello las barras deber3an ser m3s largas que el l3mite permitido.

En general est3 bastante compensado el trabajo de tracci3n y el de compresi3n, siendo est3 primero ligeramente mayor. Una nueva mejora pasar3a por compensar estos valores, haciendo que parte de estructura pase a recinto positivo.

**5.9.8 Soluci3n con  $l_{max}=40\%$  y recinto positivo**

En esta ocasi3n se ve claramente en la figura 5. 44 el diente de sierra formado 3nicamente en el recinto positivo, se repite en dos ocasiones, coincidiendo con la zona lineal de la base. En los extremos derecho e izquierdo aparecen dos c3pulas, la tracci3n en la base se la llevan los semianillos de la misma en combinaci3n con la parte baja de los dientes.

En el desglose del trabajo de la tabla 5. 46 se observa como es mayor el trabajo a compresi3n que a tracci3n como en todas las soluciones de recinto positivo. La diferencia entre el trabajo horizontal y el vertical es grande, eso indica que se puede conseguir una mejora de la soluci3n mediante una transformaci3n afin con  $\kappa=1.48$  (f3rmula 4.14). Esto aumentar3a el canto de 22.70m a 33.55m y reducir3a el volumen estructural en un 7.2% de 928261 a 861689 kN.m.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	318383	56451	374834
$V_s^-$	318383	235044	553427
	636766	291495	928261

tabla 5. 46: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo



5.9.9 Resumen de resultados

En la tabla que se muestra a continuación se muestran los resultados obtenidos. Se indican los valores de volumen estructural (Vs) y esbeltez (l/h) en paralelo para las soluciones de recinto completo y recinto positivo.

Mixta	Recinto Completo		Recinto Positivo	
Lmax:	Vs	l/h	Vs	l/h
160% (39n)	0.169 e06	50/27.89 = 1.79	0.273 e06	50/28.13 = 1.78
80% (39n)	0.453 e06	50/42.83 = 1.17	0.545 e06	50/26.13 = 1.91
80% (54n)	0.522 e06	50/59.71 = 0.84	0.658 e06	50/37.25 = 1.34
40% (54n)	0.850 e06	50/36.95 = 1.35	0.928 e06	50/22.70 = 2.20

tabla 5. 47: Resumen de resultados.

Para ver como varía la carga aplicada directamente en los apoyos, se ha elaborado la tabla 5. 48. Llama la atención que en esta ocasión con barras más largas que la luz salvada (160%) la carga no aumenta tanto como cabría esperar. siendo poco mayor que en el caso siguiente (80%-39n). Al aumentar el número de nudos de 39 a 54, más carga va directamente a los apoyos, este valor se reduce rápidamente según las barras son más cortas (40%).

	CARGA TOTAL (kN)	Recinto completo CARGA EN LOS APOYOS %	Recinto positivo CARGA EN LOS APOYOS %
INICIAL	19.364 e03	-	21
160% (39n)	19.364 e03	39	48
80% (39n)	19.364 e03	34	40
INICIAL	19.364 e03	-	18
80% (54n)	19.364 e03	40	56
40% (54n)	19.364 e03	28	24

tabla 5. 48: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos



Para explorar configuraciones de base rectangular se ha creado el presente ejemplo. En este caso se estudia cubrir un espacio de proporciones 2 a 1, análogo al ejemplo anterior. Se ha tomado como base el ejemplo de base cuadrada, por lo que la configuración inicial es similar, con las necesarias transformaciones.

La configuración inicial tiene 46 nudos y 118 elementos, por lo que se necesita un mínimo de 20 bielas de sustentación, 18 de las cuales se sitúan en la coacción vertical de los nudos de contorno, como son necesarias un mínimo de 3 bielas en horizontal que impidan el giro y el deslizamiento de la estructura, se decide situar cuatro, en las esquinas, de manera análoga a la representación de la figura 5. 17.

La carga aplicada en los nudos apoyados es del 23% del total (22.493 e03 kN) mientras el volumen estructural se puede desglosar de la siguiente manera (tabla 5. 49)

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	7682996	67543	7750539
$V_s^-$	7682996	138010	7821007
	15365993	205553	15571547

tabla 5. 49: Volumen estructural desglosado, solución inicial de 46 nodos, base rectangular.

Debido a la gran diferencia de trabajo en traslados horizontales y verticales, se puede conseguir fácilmente una estructura mejor que reduzca el volumen estructural en un 77%, por medio de una transformación afin (fórmula 4.14) donde  $\kappa=8.65$  por lo que aumenta el canto de 5.56m a 48.07m. Esta transformación solo afectaría a la geometría, no alterando la topología y el volumen estructural final sería de 3.554 e06 kN.m, por medio del recocido simulado la mejora será mucho mayor como se ve en las siguientes soluciones.

### 5.10.1 Solución con $l_{max}=80\%$ y recinto completo

La primera solución encontrada es para una longitud de barra del 80% de la luz corta con recinto completo (figura 5. 47). Se confirma la tendencia a barras largas pues de esta manera no solo se reduce el volumen estructural aumentando el canto sino que se reduce la carga real resistida, al provocar que una mayor parte de la carga se vaya

directamente a los apoyos. La carga aplicada en los nudos apoyados es el 65% del total, es decir, el 35% restante está aplicado en los nudos variables. En las secciones de la figura 5. 46 se puede observar los altibajos de la geometría, los sucesivos cambios de recinto en los que aparecen las configuraciones arco-catenaria, soportando el conjunto a la vez que lo modulan. Se distingue un arco-catenaria paralelo al lado corto izquierdo del rectángulo de apoyo, y otros dos triangulan la superficie entrelazando sus cordones en la zona central por lo que no aparecen tan claras como en otras ocasiones, y uno último casi paralelo al lado corto derecho. Entre los sistemas arco-catenaria extremos y los lados cortos de la base, surgen unas pirámides que cubren este espacio.

La estructura se divide en tres zonas, igual que la siguiente solución, una primera cercana a una pirámide en el recinto positivo, la zona intermedia se divide a su vez en tres pirámides de base triangular, en la tercera, creando simetría con la primera, una nueva pirámide hacia el recinto negativo de base trapezoidal.

A continuación se desglosa el volumen estructural como en ejemplos anteriores, en la tabla 5. 50.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	130461	68515	198976
$V_s^-$	130461	78449	208910
	260922	146964	407886

tabla 5. 50: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

En este caso se observa como el trabajo correspondiente a tracción y a compresión son muy similares. Esto sucede gracia a que la configuración es prácticamente simétrica y hay tanta estructura por encima de la superficie de apoyo como por debajo. Como se puede ver sucede lo mismo con el que corresponde con desplazamientos de carga en horizontal y vertical. Esto indica que poca mejora es posible, aumentando el canto de 44.04m a 58.68m, por medio de una transformación afín según la fórmula (4.14) en la que  $\kappa=1.33$  se consigue reducir el volumen estructural en casi en un 4% llegando a ser de 391643kN.m.



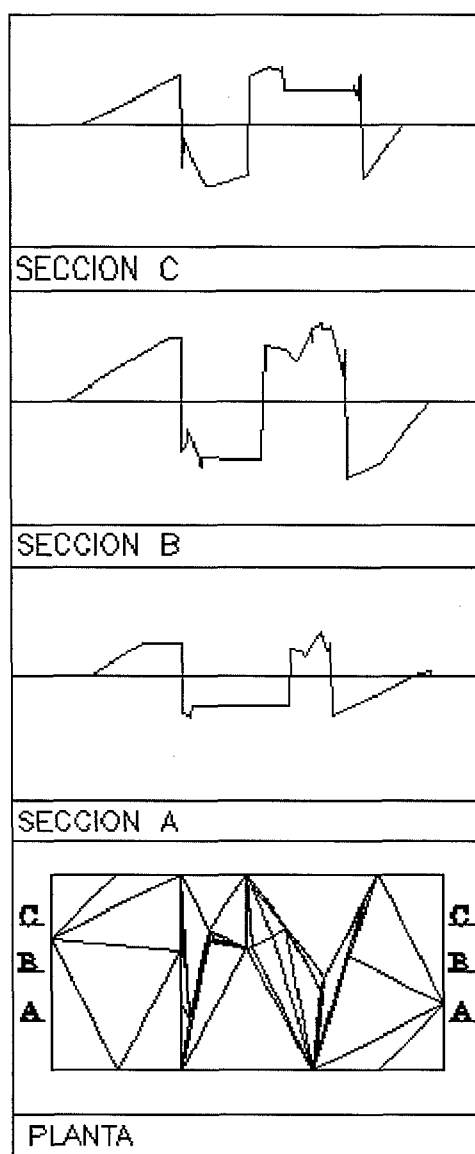
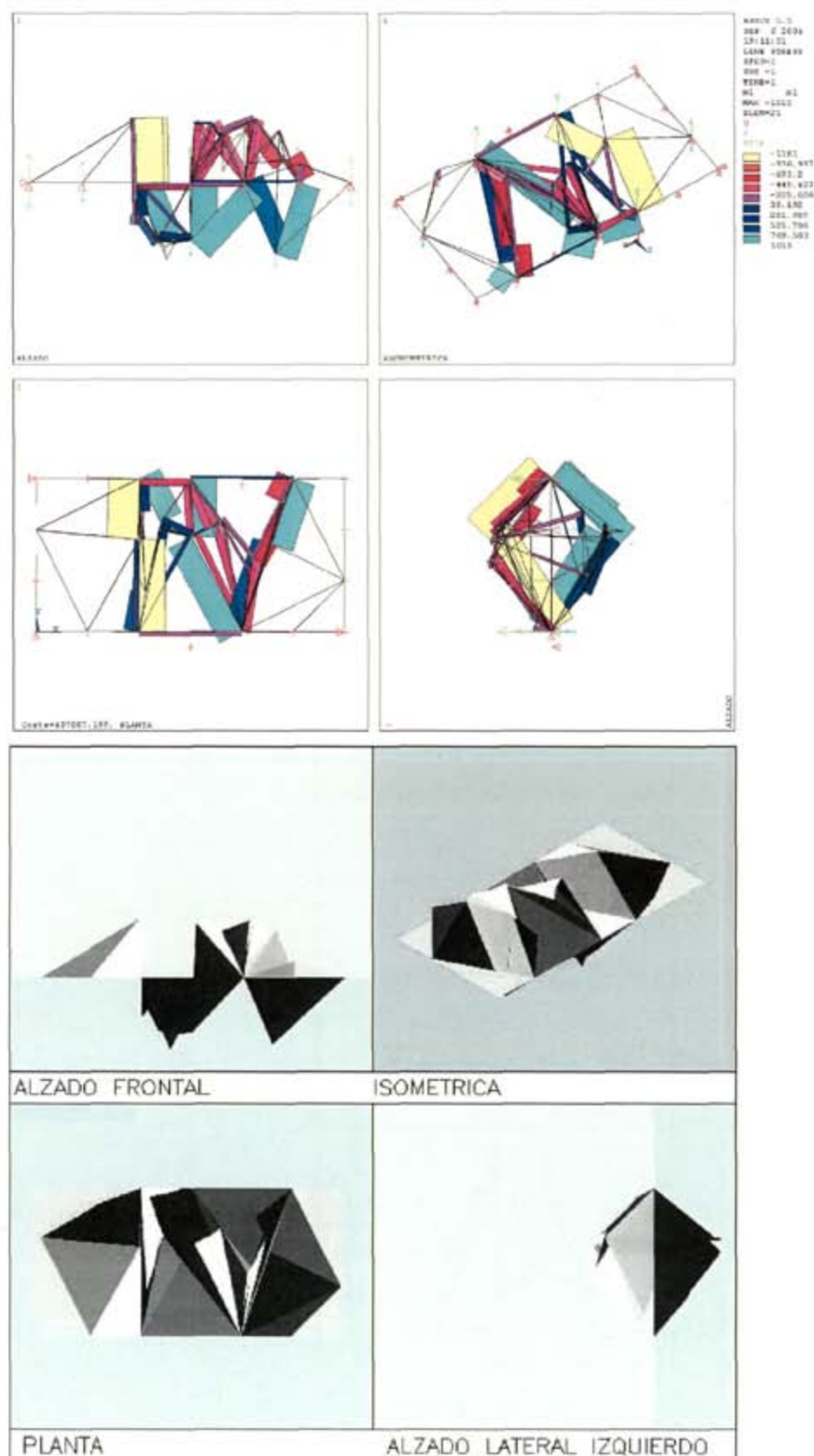


figura 5. 46: Secciones de la solución para recinto completo.

En las secciones de la figura 5. 46 se aprecia la casi verticalidad de los sistemas arco-catenaria, de ahí que apenas sea necesaria la colaboración de un anillo en la base.



5.10.2 Soluci3n con  $l_{max}=80\%$  y recinto positivo

En la geometr3a encontrada para recinto positivo se definen claramente dos zonas, una primera a la izquierda, en forma cupular, formada por unas barras a compresi3n a modo de arcos y unos tirantes uniendo la base a tracci3n (azul). La segunda zona, a la derecha, alcanza un canto similar por medio de una estructura arco-tirante de planta en L. Se adapta a la forma de la base por medio de zonas planas casi a la cota de los apoyos.

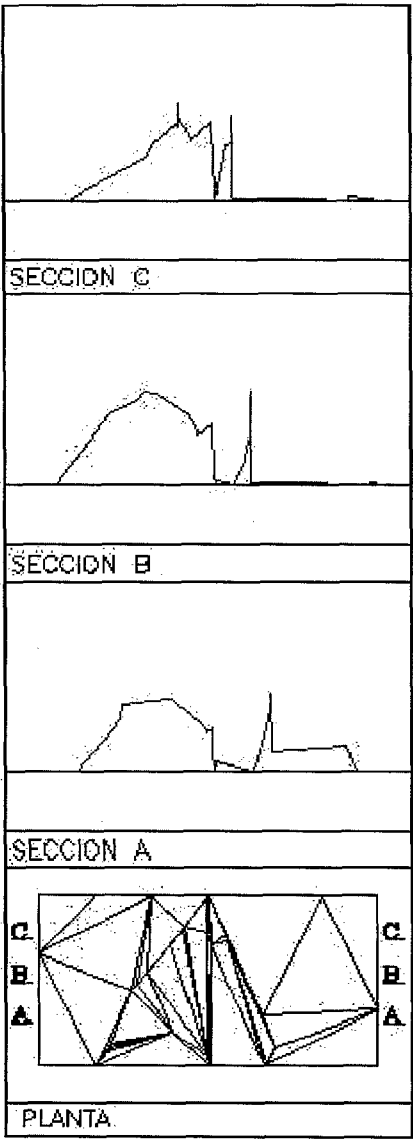


figura 5. 48: Secciones

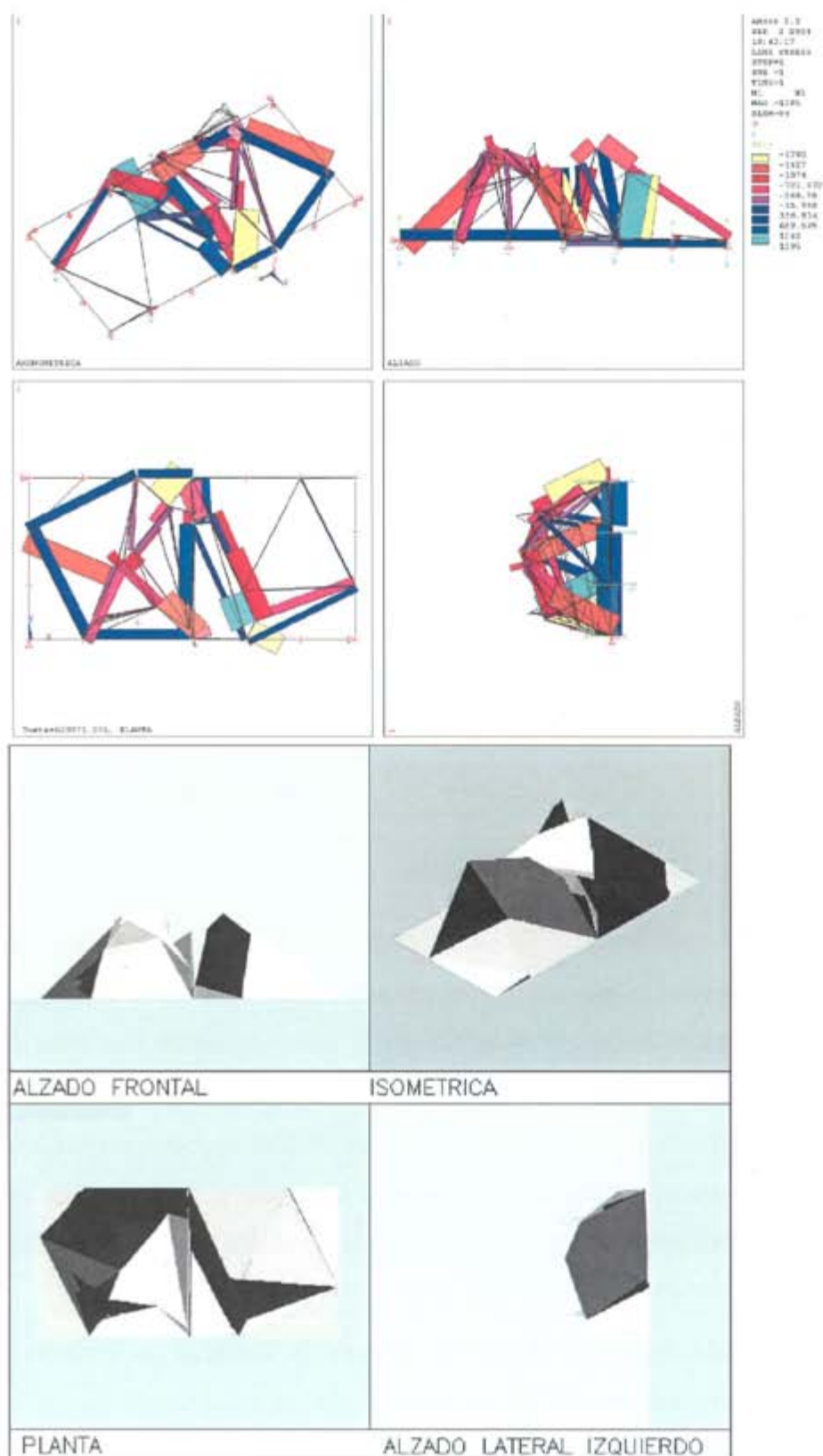


Figura 5. 49: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo  $V_s=0.620 \text{ e}06\text{kN.m}$

De nuevo la carga aplicada en los nudos apoyados es alta, un 56% del total, el desglose del volumen estructural se muestra en la tabla 5. 51 . El trabajo horizontal tanto a tracción como a compresión son iguales, lo que indica la nula colaboración de los apoyos horizontales. El trabajo horizontal es poco mayor que el vertical, lo que sugiere que el diseño se puede mejorar ligeramente, mediante una transformación afin (según la fórmula 4.14) con  $\kappa=1.18$ . De esta manera se reduciría el volumen estructural global en un 1.4%, llegando de esta forma a ser 611943kN.m, el canto pasaría de 29.65m a 35.00m.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	180570	61220	241790
$V_s^-$	180570	198011	378581
	361140	259231	620371

tabla 5. 51: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo.

Como en el resto de diseños de recinto positivo es mayor el trabajo global a compresión que a tracción, en este caso la relación  $V_s^{=} / V_s^{+||}$  es del orden de 3.

### 5.10.3 Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto completo

La solución que ha aportado el programa (figura 5. 51) es muy similar a la obtenida con base cuadrada del la figura 5. 23. En este caso repite la solución dos veces. Recordar que el lado largo de la base es el doble que el corto. Aparecen una serie de estructuras arco-catenaria, ligeramente inclinadas, a modo de diente de sierra. De esta manera se modula la estructura en una serie de valles y montículos, que son el resultado de unir, mediante las barras los arcos con las catenarias contiguas y, a su vez, con los puntos de apoyo. En el encuentro con las esquinas aparece en planta un arco forma casi semicircular. Parece que intenta buscar una base mixta como en el ejemplo anterior.

Parece que de esta forma se intenta compensar la cantidad de estructura comprimida con la traccionada y casi lo consigue según se puede apreciar en la tabla 5. 52. No sucede lo mismo con el trabajo horizontal y vertical por lo que se podría mejorar el diseño mediante una transformación afin en la que  $\kappa=1.91$ . De esta manera se

conseguiría igualar el trabajo vertical y el horizontal, y reducir en un 18% la función objetivo. El canto total aumentaría casi al doble, de 28.25m a 53.81m.

La carga aplicada en los nudos apoyados se puede reducir respecto de los ejemplos de barras más largas, así en este caso es el 32%

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	346587	92780	439367
$V_s^-$	346587	98242	444829
	693174	191022	884196

tabla 5. 52: Volumen estructural desglosado, solución para Lmax=40%, recinto completo.

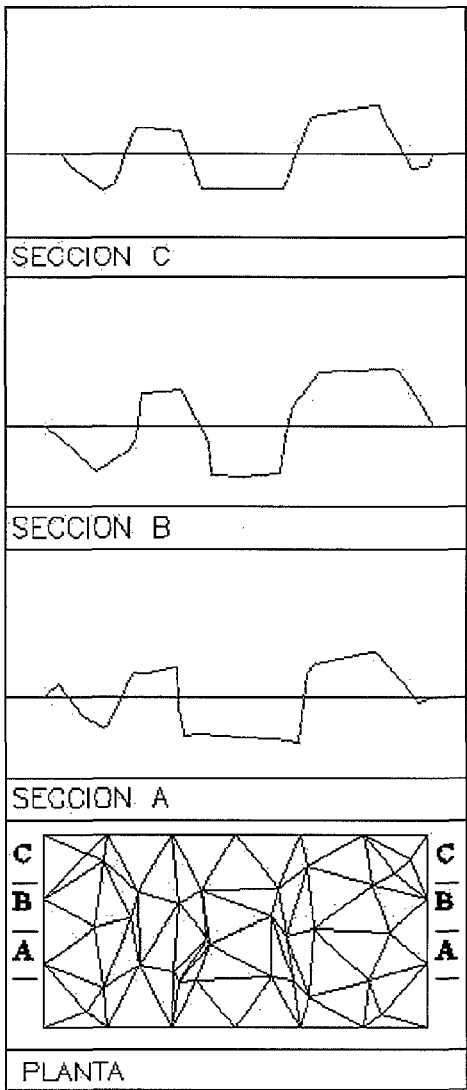


figura 5. 50: Secciones

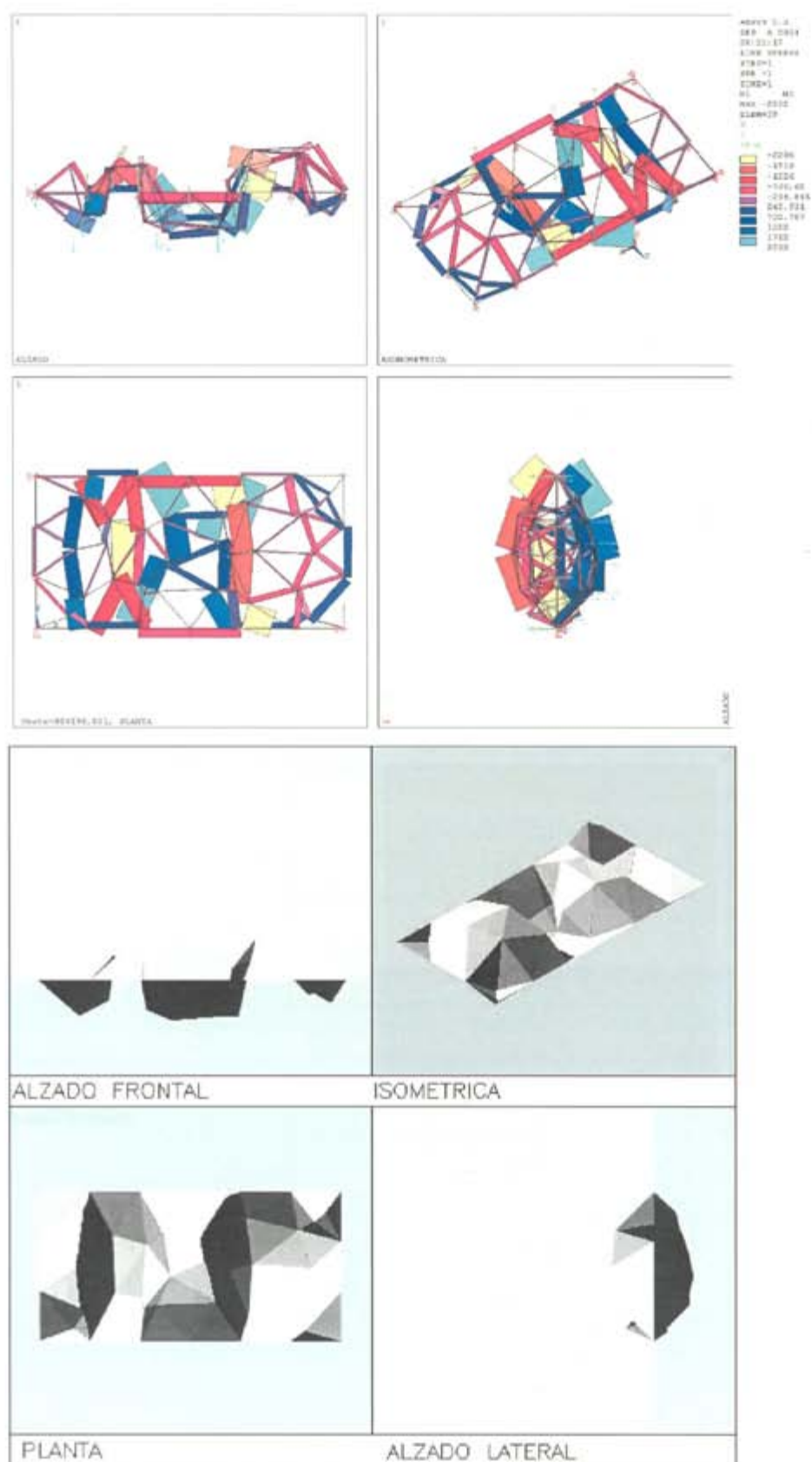


figura 5. 51: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo  $V_s=0.884 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

#### 5.10.4 Solución con $l_{max}=40\%$ y recinto positivo

Si se observa la figura 5. 53 se ven claramente dos cúpulas yuxtapuestas, formadas por barras trabajando a compresión y los dos anillos de la base a tracción. También se puede apreciar que casi todas las barras tienen la misma importancia salvo las centrales, en la unión de los anillos atirantados de las dos cúpulas, donde el axil es mayor que en el resto. En las esquinas, se intenta adaptar a la forma impuesta, pero aparece la tendencia a la base circular o mixta. De nuevo se repite el comportamiento de la solución con base cuadrada por duplicado.

En la deformada figura 5. 52, se observa como los apoyos de los lados largos de la base se abren hacia a fuera, producido por el alargamiento de los anillos en esa zona, a falta de apoyos que se lleven ese empuje.

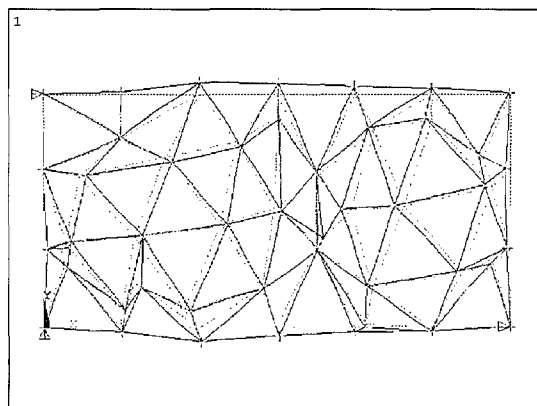


figura 5. 52: Deformada

La carga aplicada en los nudos apoyados es el 24% del total, mientras, el desglose del trabajo de la estructura es la que se muestra en la tabla 5. 53. En el volumen estructural debido a traslados de carga en horizontal, se observa que son iguales la componente de tracción y la de compresión, lo que indica la nula influencia de los apoyos horizontales en el reparto del trabajo. Como en todas las soluciones de recinto positivo, es mayor el trabajo total a compresión que el de tracción en una proporción  $V_s^{-II} / V_s^{+II}$  de 5. En cuanto al traslado de cargas en horizontal y vertical, es mucho mayor el primero, lo que indicaría una posible mejora con un canto mayor, pero eso no es posible con la limitación del tamaño de barras impuesto.





	Vs <sup>=</sup>	Vs <sup>  </sup>	
Vs <sup>+</sup>	450494	46113	496607
Vs <sup>-</sup>	450494	240980	691474
	900988	287093	1188081

tabla 5. 53: Volumen estructural desglosado, solución para Lmax=40%, recinto positivo.

Si se realizase una transformación afin, con  $\kappa=1.8$ , se pasaría del canto de 19.9m a 35.27m, y se obtendría una mejora en un 14.4% en el volumen estructural, llegando a ser de 1.017 e06 kN.m.

5.10.5 Resumen de resultados

En la tabla que se muestra a continuación se muestran los resultados obtenidos comparando paralelamente las soluciones de recinto completo y recinto positivo. Se indican los valores de volumen estructural (Vs) y esbeltez (l/h).

Mixta	Recinto Completo		Recinto Positivo	
Lmax:	Vs	l/h	Vs	l/h
80% (40m)	0.408 e06	50/44.04 = 1.14	0.620 e06	50/29.65 = 1.69
40% (20m)	0.884 e06	50/28.25 = 1.77	1.188 e06	50/19.91 = 2.51

tabla 5. 54: Resumen de resultados.

Para ver como se ha ido reduciendo la carga aplicada directamente en los apoyos, o lo que es lo mismo, aumentar la carga real soportada, se ha elaborado la tabla 5. 55. Se observa que con barras cada vez más cortas la carga aplicada en los apoyos disminuye, o lo que es lo mismo, hay mayor proporción de carga aplicada en los nudos variables.

	CARGA TOTAL (kN)	Recinto completo % CARGA EN LOS APOYOS	Recinto positivo % CARGA EN LOS APOYOS
INICIAL	22.493 e03	-	23
80% (40m)	22.493 e03	65	56
40% (20m)	22.493 e03	32	24

tabla 5. 55: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos.

5.11 Base rectangular proporci3n 3/1

Siguiendo con la l3nea de los ejemplos anteriores, en este caso se estudia la estructura de base rectangular con una proporci3n de 3 a 1. El prop3sito es encontrar el ritmo con el que repiten los esquemas encontrados hasta ahora.

Para este fin se ha creado el modelo que se puede observar en la figura 5. 54 con 67 nudos, de los cuales 24 son de contorno y 175 elementos. Las coacciones est3n situadas, como en ejemplos anteriores. Todos los nudos del contorno tienen una coacci3n al movimiento en vertical, a esto se a3aden las tres bielas horizontales que impidan el desplazamiento y el giro del conjunto como s3lido r3gido, y sit3an en 3 de las esquinas. El conjunto, de esta manera, es isost3tico.

La estructura sigue el mismo patr3n que el ejemplo anterior de base rectangular. El desglose del trabajo de la estructura se muestra en la tabla 5. 56, de donde se deduce que esta estructura, tan rebajada, es f3cilmente mejorable aumentando el canto, as3, mediante una transformaci3n afin en la que  $\kappa=9.93$  se aumentar3a el canto de 5.56m a 55.19m con una reducci3n del volumen estructural del 80% pasando a ser de 8.684 e06 kN.m en lugar del que aparece en la tabla. La carga total es de 33.741 e03 kN, de los cuales el 21% se aplica directamente en los nudos de apoyo.

	$V_s^=$	$V_s^{''}$	
$V_s^+$	21548331	163066	21711397
$V_s^-$	21548331	274352	21822683
	43096662	437418	43534080

tabla 5. 56: Volumen estructural desglosado, soluci3n inicial, 67 nudos, base rectangular 3/1.

La disposici3n de los apoyo horizontales no influye en el reparto del trabajo, eso se aprecia al ser el trabajo iguales las dos componentes del volumen estructural horizontal ( $V_s^= = V_s^{+=}$ ). Caracter3stica que tambi3n se observar3 en las soluciones que se muestran a continuaci3n.



5.11.1 Soluci3n con  $l_{max}=80\%$  y recinto completo

Con barras largas la soluci3n parece estar definida por una serie de 6 arco-catenarias que corresponden con las secciones de la D a la I de la figura 5. 56. En los extremos, las secciones D e I, son casi paralelas a los lados cortos mientras que las intermedias triangulan la superficie al coincidir en los nudos de apoyo. De esta manera se alcanza un canto total de casi 47m. La carga aplicada en los nudos de apoyo aumenta hasta el 56% del total, m3s de la mitad.

El desglose del volumen estructural se muestra en la tabla 5. 57, se puede apreciar como el trabajo a compresi3n y a tracci3n son similares, lo que hace pensar que la estructura se reparte de igual manera entre la zona positiva y negativa del recinto, seg3n el eje Z, a pesar de no mostrar una clara simetr3a. No sucede lo mismo con el trabajo realizado en traslados horizontales y verticales, siendo mayor el primero, esto indica que, mediante una transformaci3n afin con el factor de proporci3n  $\kappa=1.4$  (f3rmula 4.14), se reducir3a el volumen estructural en poco m3s de un 5% llegando a ser de 0.652 e06kN.m. Esta operaci3n implica el aumento del canto hasta 65.6m.

	$V_s^=$	$V_s^{  }$	
$V_s^+$	227738	117885	345623
$V_s^-$	227738	115700	343438
	455476	233585	689061

tabla 5. 57: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=80\%$ , recinto completo.

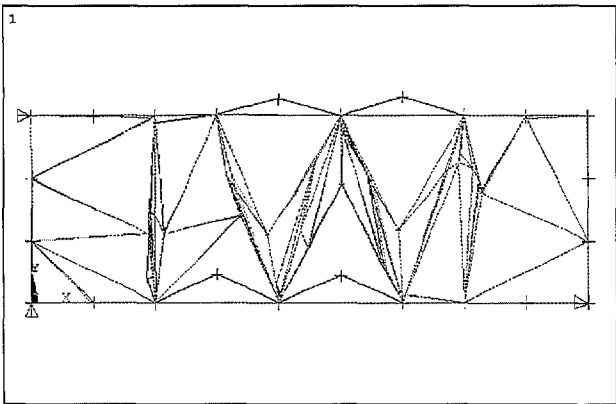


figura 5. 55: Deformada

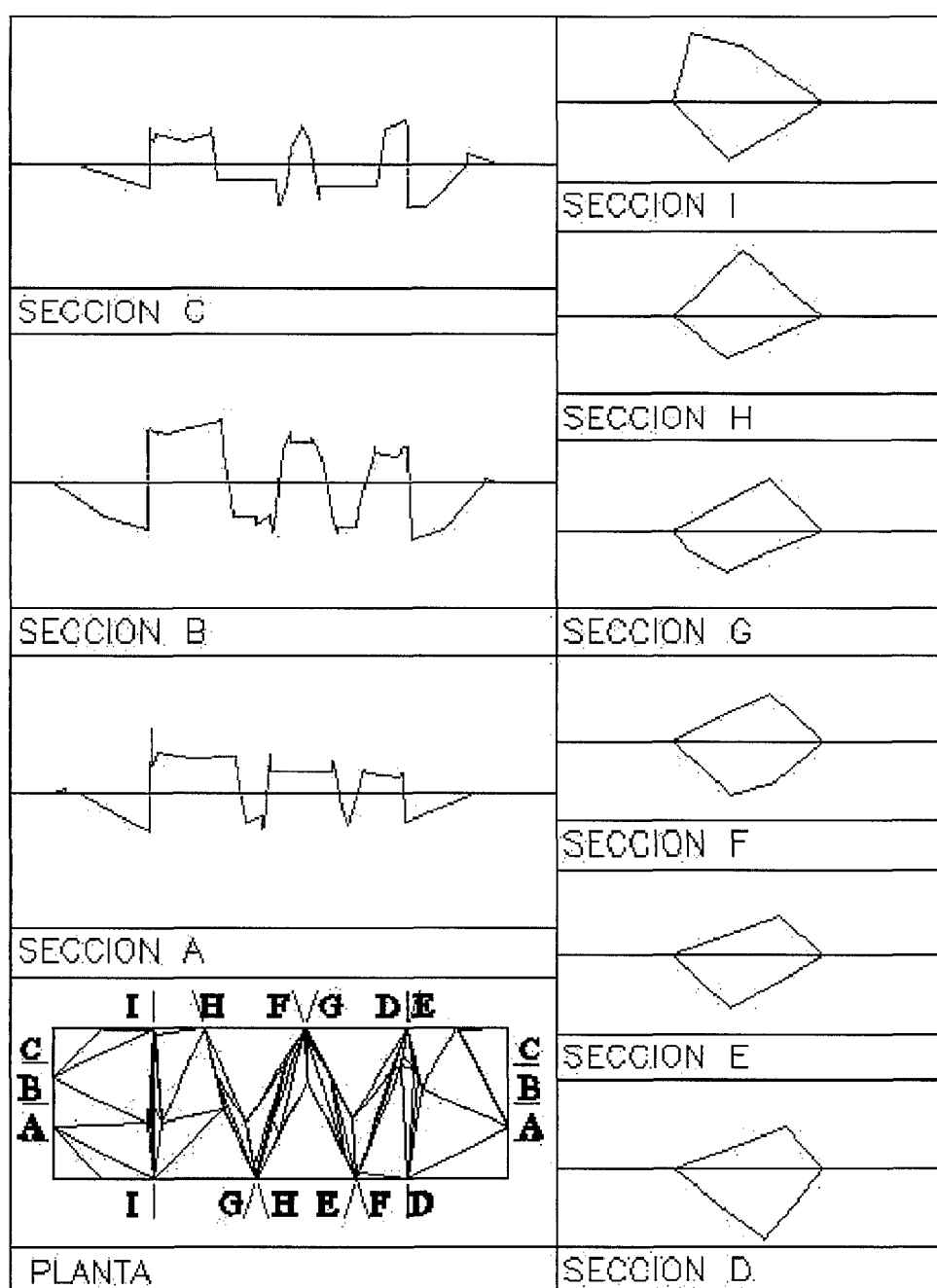


figura 5. 56: Secciones

Las ligeras inclinaciones de los sistemas arco-catenaria que se pueden apreciar en las secciones (figura 5. 56) facilitan que otros pequeños sistemas de segundo orden se apoyen, o cuelguen, en estos cubriendo la totalidad de la planta. Esta inclinación hace que se compensen los empujes en el anillo.



5.11.2 Solución con  $l_{max}=80\%$  y recinto positivo

Al restringir la búsqueda al recinto positivo, la solución encontrada manifiesta una geometría mixta, intentando buscar la configuración de cúpulas y de arco-tirante, en planta muestra una forma de zig-zag. Esta geometría se puede apreciar tanto en la sección de la figura 5. 58 como en las vistas de la figura 5. 59.

El 40% de la carga total se aplica directamente en los nudos de apoyo. El desglose del volumen estructural se muestra en la tabla 5. 58, de donde se puede deducir que se ha alcanzado una esbeltez cercana a la óptima, según la fórmula (4.14) se conseguiría una mejora mediante una transformación afin con  $\kappa=1.08$ , tan cercano a la unidad que el cambio es muy pequeño. De esta manera se aumentaría el canto de 35.55m a 38.31m y el volumen estructural se reduciría hasta 0.992 e06 kN.m, lo que representa un de reducción 0.3%.

	$Vs^=$	$Vs^{II}$	
$Vs^+$	267344	67264	334608
$Vs^-$	267344	393280	660624
	534688	460544	995232

tabla 5. 58: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo

En los diseños de recinto positivo el trabajo a compresión es mayor que el de tracción, en este caso la relación  $Vs^{II} / Vs^{+II}$  es cercano a 6.

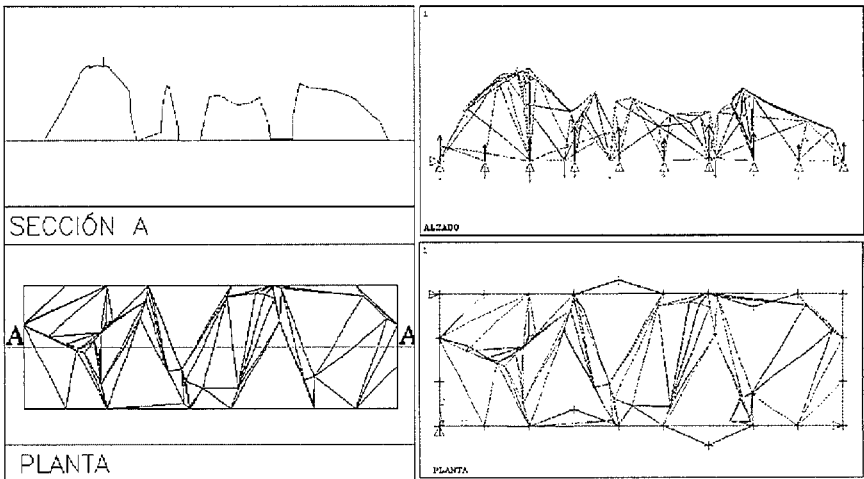


figura 5. 58: Secciones y Deformada.



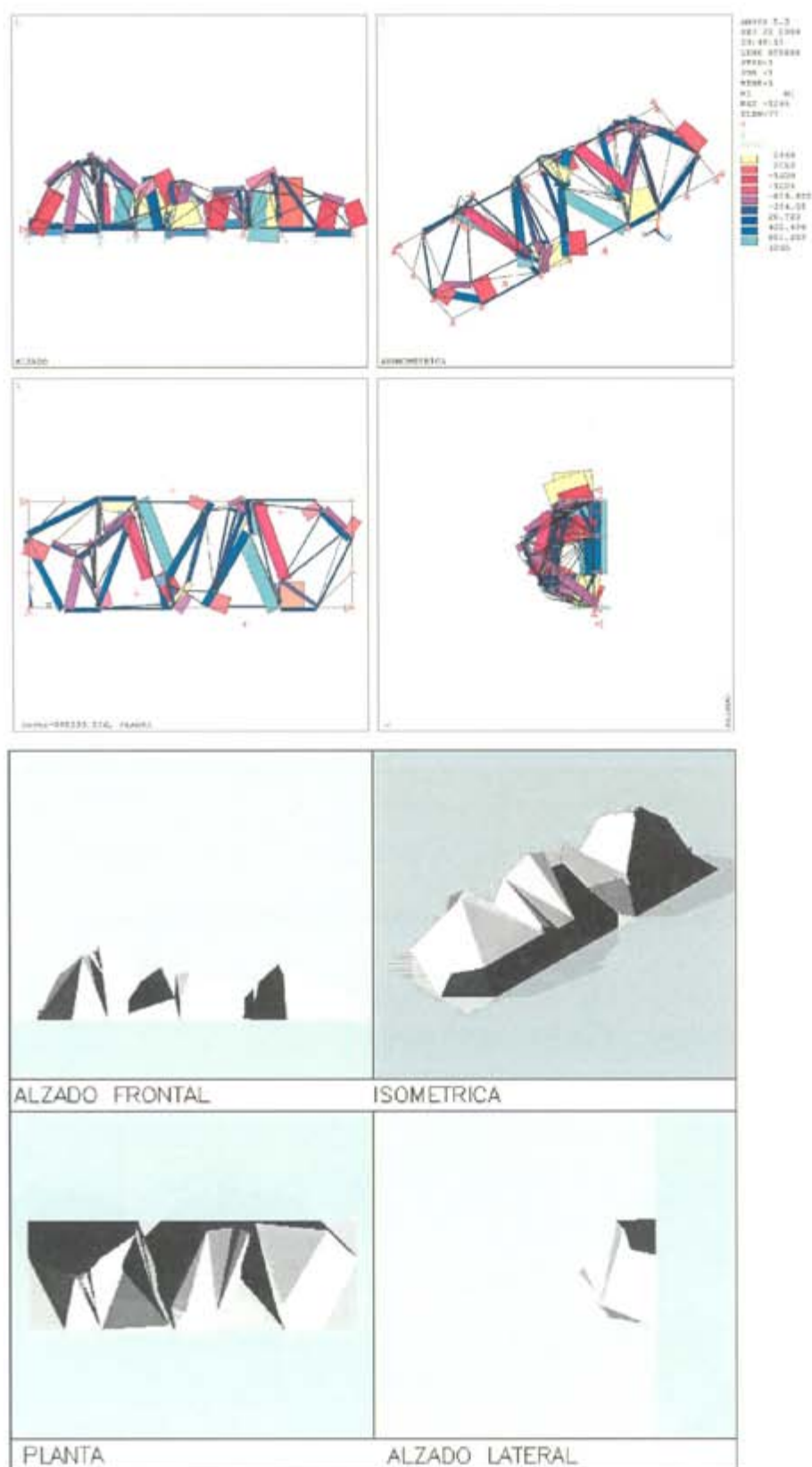
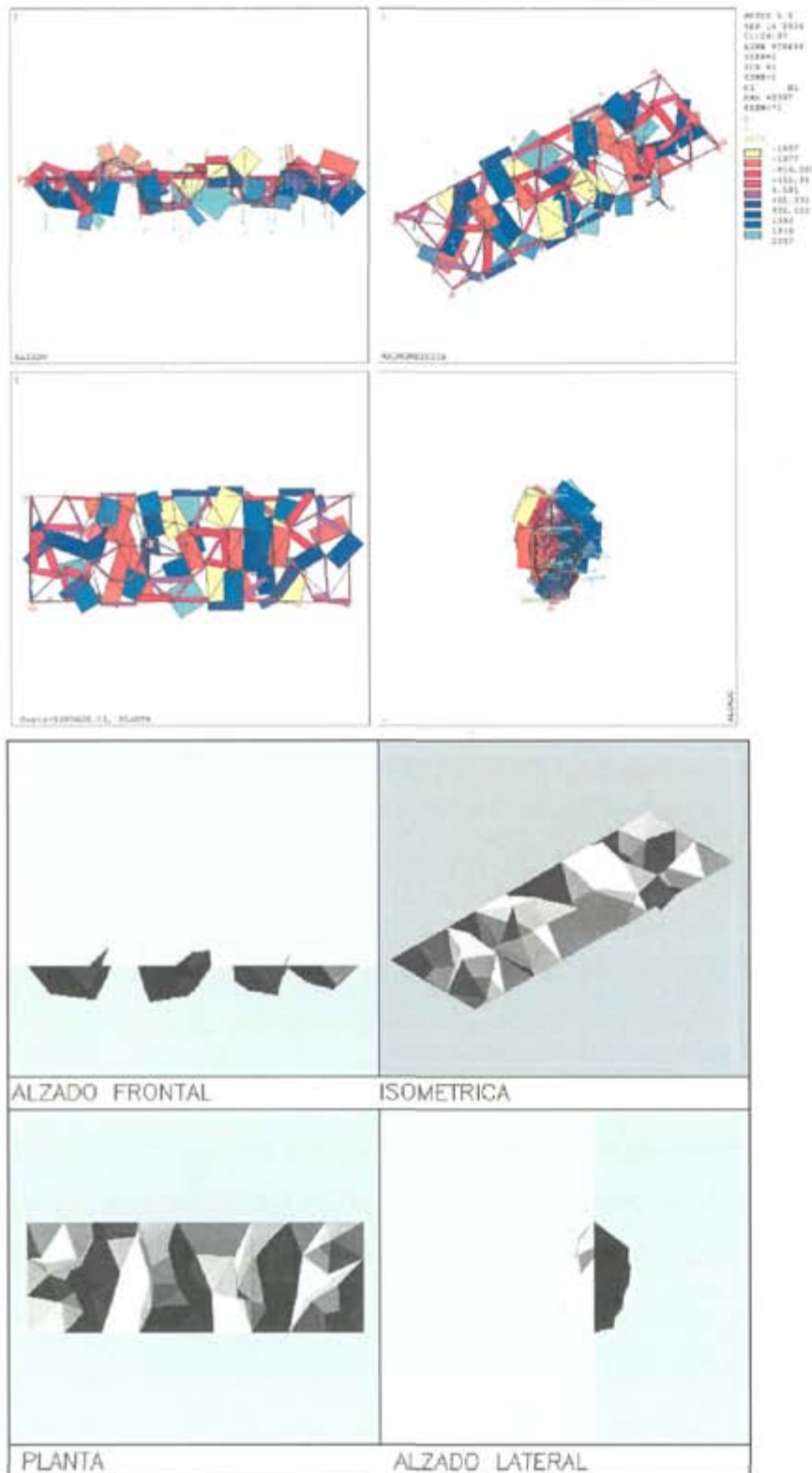


figura 5. 59: Solución para  $L_{max}=80\%$ , recinto positivo,  $V_s=0.995 \times 10^6$  kN.m.

5.11.3 Solución con  $l_{max}=40\%$  y recinto completofigura 5. 60: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo,  $V_s= 1.493 \text{ e}06\text{kN.m}$

En el caso anterior, con barras largas, se intuía un ritmo que ahora se ve con más claridad. Aparece la misma estructura que se veía con la base cuadrada (figura 5. 23) repetida tres veces. Llama la atención en estos ejemplos la claridad con la que se reproduce la misma solución, una serie de estructuras arco-catenaria, que hacen que aparezcan sucesivos valles y montículos. En los extremos, para adaptarse a las esquinas, aparecen unas plegaduras donde en otras ocasiones han aparecido barras formando un anillo (figura 5. 60).

En este caso la geometría es más sencilla, por eso solo una sección basta para entenderla fácilmente, esto se aprecia en la figura 5. 61 (izquierda).

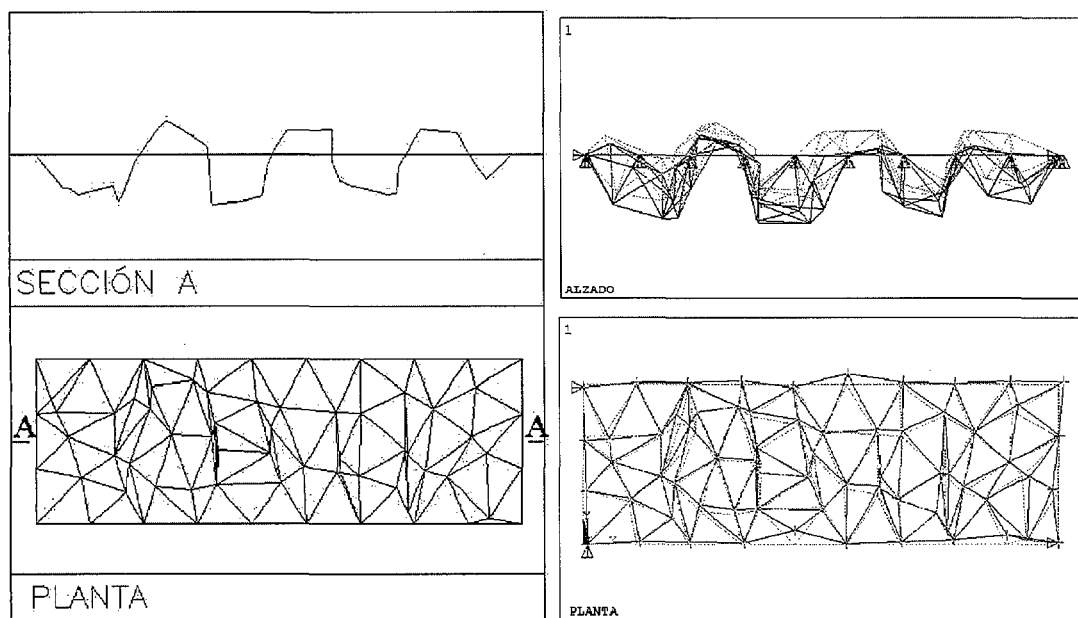


figura 5. 61: Geometría en planta y sección (izquierda). Deformada en planta y alzado (derecha)

En la deformada (figura 5. 61 derecha), se aprecia como debido a la no existencia de anillo se producen desplazamientos relativamente grandes en los apoyos intermedios del lado largo de la base. Esto provoca que las barras perimetrales que acometen a esos apoyos trabajen con un axil relativamente alto.

Como ya se ha visto en otros ejemplos con barras más cortas se aplica menor proporción de carga en los nudos de apoyo, siendo en esta ocasión el 24% del total.

El volumen estructural debido a las barras traccionadas es ligeramente mayor al de las barras comprimidas, esto indica que la estructura está equilibrada entre recinto

positivo y negativo. De nuevo no coinciden los traslados de carga en horizontal y en vertical lo que indica que una mejora se puede conseguir mediante una transformación afin (fórmula 4.14) con  $\kappa=1.8$ , es decir aumentando el canto de 26.5m a 47.6m. De esta manera se conseguiría reducir el volumen estructural en un 15%

	$V_s^=$	$V_s^{II}$	
$V_s^+$	570141	211183	781324
$V_s^-$	570141	142162	712303
	1140282	353345	1493627

tabla 5. 59: Volumen estructural desglosado, solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto completo.

5.11.4 Solución con  $l_{max}=40\%$  y recinto positivo

En este caso, y después de haber visto las soluciones anteriores se podría adelantar a priori una posible solución, una serie de tres cúpulas yuxtapuestas, y efectivamente así es. No todas las cúpulas tienen el mismo desarrollo, en la sección de la figura 5. 62 se observa como todas tienen, aproximadamente, el mismo canto total y como la de la derecha tiene menor amplitud.

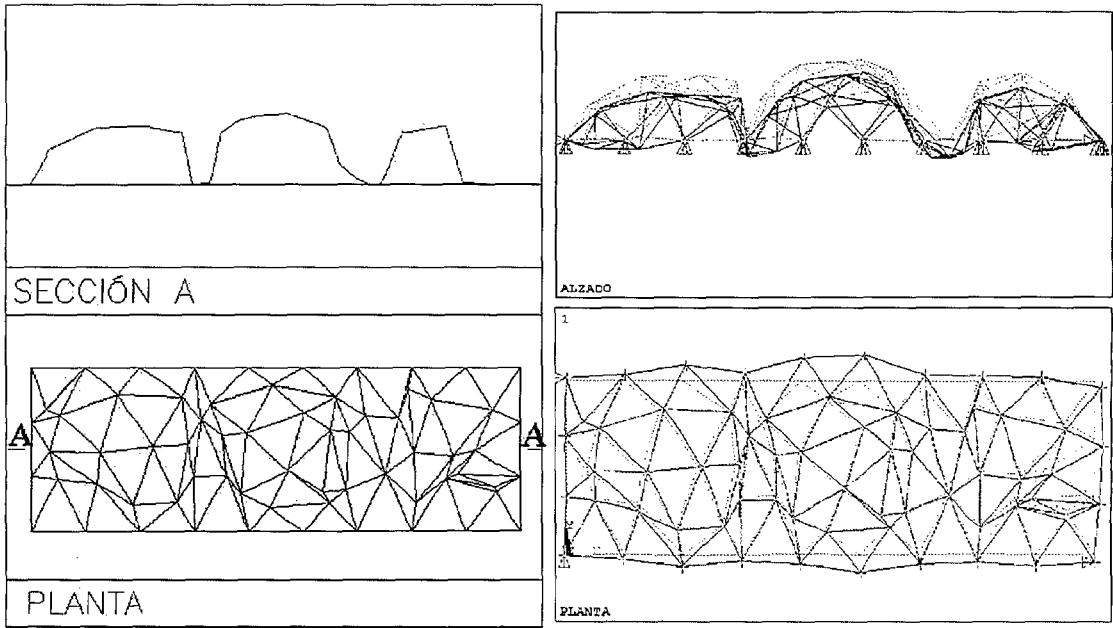


figura 5. 62: Geometría en planta y sección (izquierda). Deformada en planta y alzado (derecha)

En la figura 5. 63 se aprecia la forma de trabajar de cada uno de los elementos, tres series de c3pulas cuyas barras trabajan fundamentalmente a compresi3n y sus respectivos anillos a tracci3n. Para adaptarse a la forma rectangular, en las esquinas aparecen zonas planas esto se conjuga con el intento de configurar un anillo en forma de circunferencia, debido a la limitaci3n de la longitud de las barras, este anillo es quebrado. En la c3pula de la derecha esto se resuelve con un arco hacia los apoyos en la esquina al no poder cerrar el anillo.

Se puede prestar atenci3n a la deformada (figura 5. 62 derecha) para ver en planta como se abren los apoyos que conforman la base, esto facilita la formaci3n de los anillos.

La carga aplicada en los nudos de apoyo es el 27%, valor muy cercano al del ejemplo anterior. Por otra parte el volumen estructural se puede desglosar como se ve en la tabla 5. 60. Se observa que es mayor el trabajo a compresi3n que a tracci3n, debido a que es un dise1o en recinto positivo, la relaci3n  $Vs^{-II} / Vs^{+II}$  es del orden de 4. Por otra parte, la diferencia entre el trabajo por traslados de carga en horizontal y vertical, da la pauta para buscar una soluci3n mejor mediante una transformaci3n afin con el factor  $\kappa=1.61$  (f3rmula 4.14). De esta manera el canto aumentar3a de 23.27m a 37.40m y el volumen estructural se reducir3a en poco m3s de un 10%

	$Vs^{-}$	$Vs^{II}$	
$Vs^{+}$	673226	112461	785687
$Vs^{-}$	673226	408831	1082057
	1346452	521292	1867744

tabla 5. 60: Volumen estructural desglosado, soluci3n para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo.

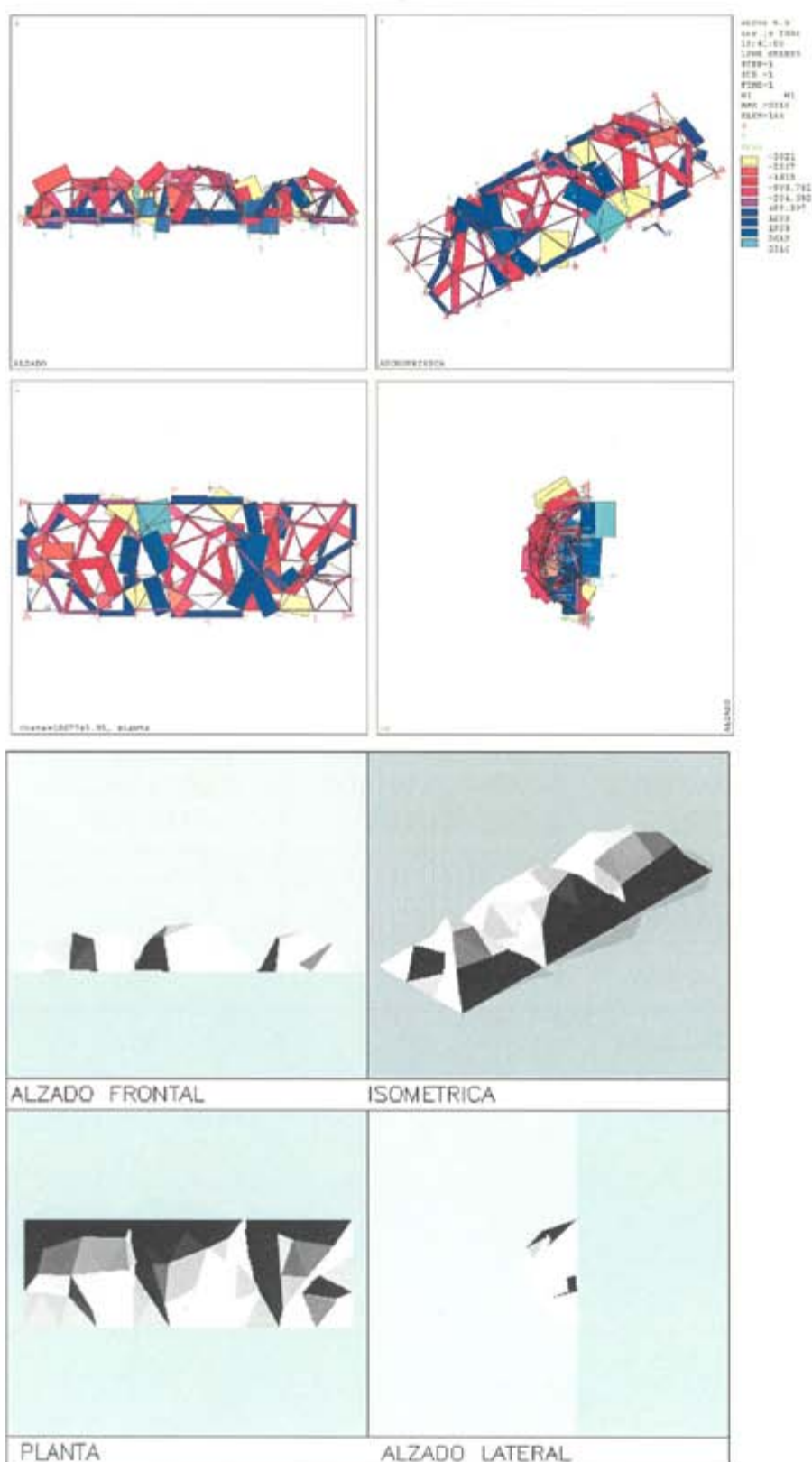


figura 5. 63: Solución para  $L_{max}=40\%$ , recinto positivo  $V_s=1.868 \text{ e06kN.m}$

5.11.5 Resumen de resultados

En la tabla que se muestra a continuaci3n se muestran los resultados obtenidos comparando paralelamente las soluciones de recinto completo y recinto positivo. Se indican los valores de volumen estructural (Vs) y esbeltez (l/h).

Mixta	Recinto Completo		Recinto Positivo	
Lmax:	Vs	l/h	Vs	l/h
80% (40m)	0.689 e06	50/46.98 = 1.06	0. 995 e06	50/35.55 = 1.40
40% (20m)	1.494 e06	50/26.50 = 1.89	1.868 e06	50/23.27 = 2.15

tabla 5. 61: Resumen de resultados.

Para ver como se ha ido reduciendo la carga aplicada directamente en los apoyos, o lo que es lo mismo, aumentar la carga real soportada, se ha elaborado la tabla que se muestra a continuaci3n:

	CARGA TOTAL (kN)	Recinto completo CARGA EN LOS APOYOS %	Recinto positivo CARGA EN LOS APOYOS %
INICIAL	33.741 e03	-	21
80% (40m)	33.741 e03	56	40
40% (20m)	33.741 e03	24	27

tabla 5. 62: Comparativa de porcentajes de carga aplicada en los apoyos.

## Capítulo 6

### Parámetros de forma en láminas

En este capítulo se analizan las soluciones obtenidas con el fin de extraer los parámetros de forma que más inciden el coste o, en este caso, en la función objetivo considerada, el volumen estructural.

#### 6.1 Evolución de las soluciones

A continuación se mostrará, a grandes rasgos, cómo van evolucionando las soluciones hasta converger en la solución final.

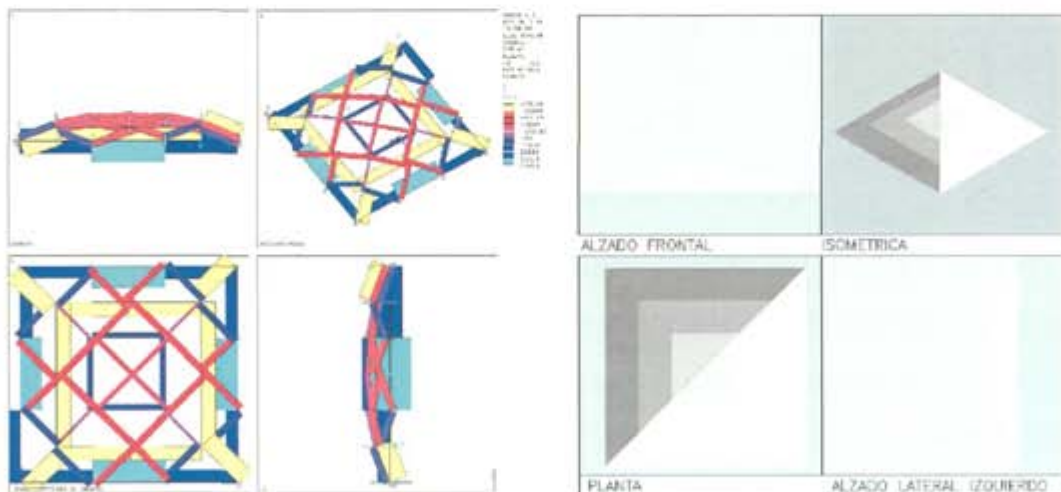


figura 6. 1: Solución inicial,  $V_s=29.776 \text{ e}06\text{kN.m}$ .

Para ello se ha elegido el proceso de búsqueda del óptimo para el ejemplo de base cuadrada, con 25 nodos, longitud máxima de barras de 40% (40m) y recinto positivo. Es el mismo que se empleó en el capítulo 3 cuando se observaba la



convergencia del recocido simulado. La solución inicial a modo de recordatorio es la que aparece en la figura 6. 1

Durante los primeros 50 ciclos se observaba en el capítulo 3 como se producen grandes saltos en el valor de la función objetivo, se están estudiando configuraciones muy distantes a la de partida y con valores de la función objetivo mucho mayores al inicial. Esto es debido a que se aceptan los cambios que producen estructuras de costes peores, además de los mejores.

Tras esos 50 ciclos la solución ha mejorado ligeramente, aun no presenta algunos rasgos fundamentales del diseño óptimo como es la esbeltez total, pero si ha disminuido la cantidad de estructura gracias a las plegaduras de la superficie.

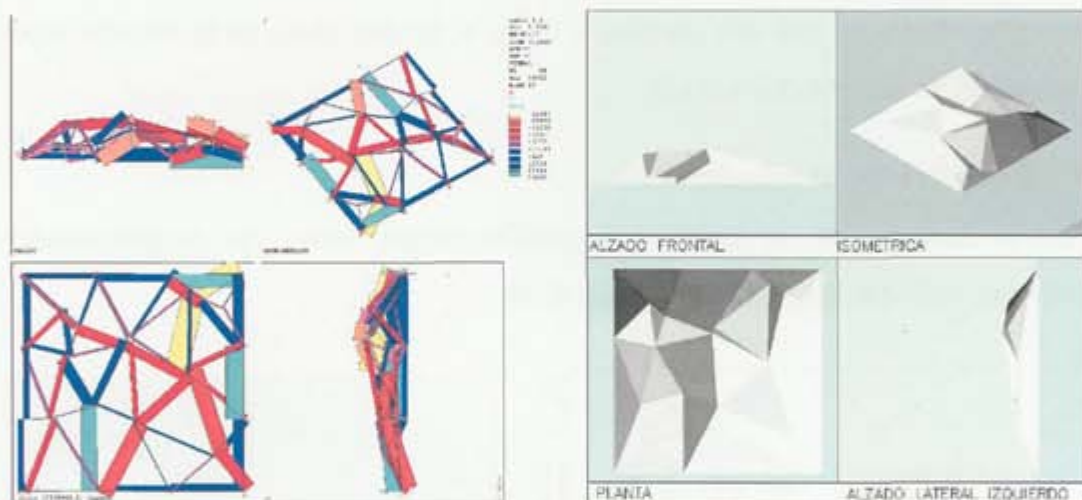


figura 6. 2: Solución a los 50 ciclos,  $V_s=17.509\text{kN/m}$

En el capítulo 3 se observa como sobre el ciclo 70 la situación se ha estabilizado, a partir de aquí la función objetivo toma una tendencia claramente decreciente. En el ciclo 100 se aprecia mucho más esta situación, como se puede ver en la figura 6. 3 ya se han alcanzado, en términos globales, las características del diseño óptimo (el canto alcanzado es muy similar al de la solución final, en este diseño algo menor). En este momento no se ha definido la geometría del anillo de la base, aun es algo difuso. Todavía es necesaria una mayor depuración de la geometría y topología, aun hay algún nudo cuya posición cambiará considerablemente, haciendo que los picos (salientes y

entrantes) que aparecen en esta solución vayan desapareciendo hacia el final del proceso.

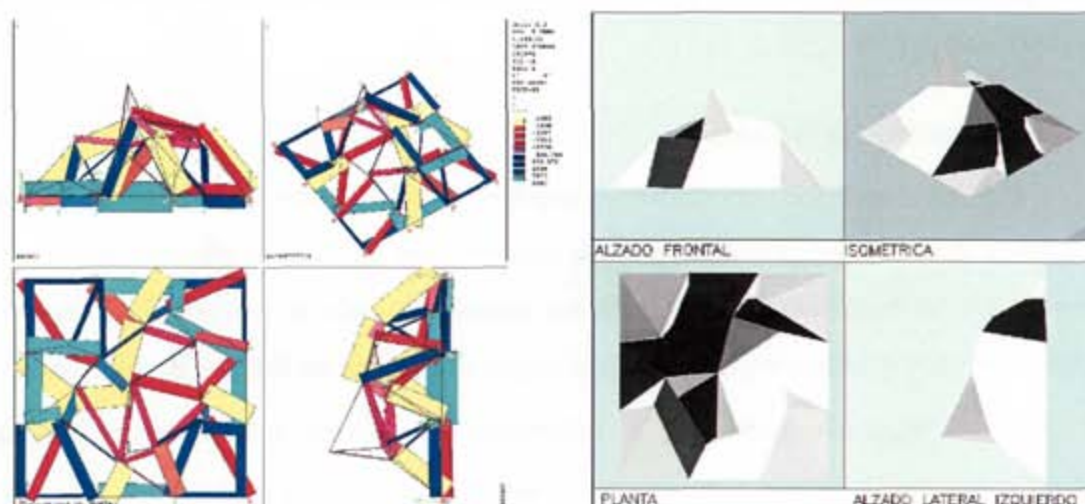


figura 6. 3: Solución a los 100 ciclos,  $V_s=4.619 \text{ e}06\text{kN.m}$

Del ciclo 100 hasta el final se depuran las posiciones de los nudos y barras. La solución final se encuentra cerca del ciclo 150, como ya se ha mostrado en el capítulo anterior, es una forma cercana a una cúpula. Se ha definido claramente la configuración en cúpula y anillo, y la función objetivo ha decrecido respecto a la primera solución al 12% del inicial, evidentemente la estructura de partida no atendía a un diseño óptimo únicamente mediante sollicitación axiales, en recinto positivo.

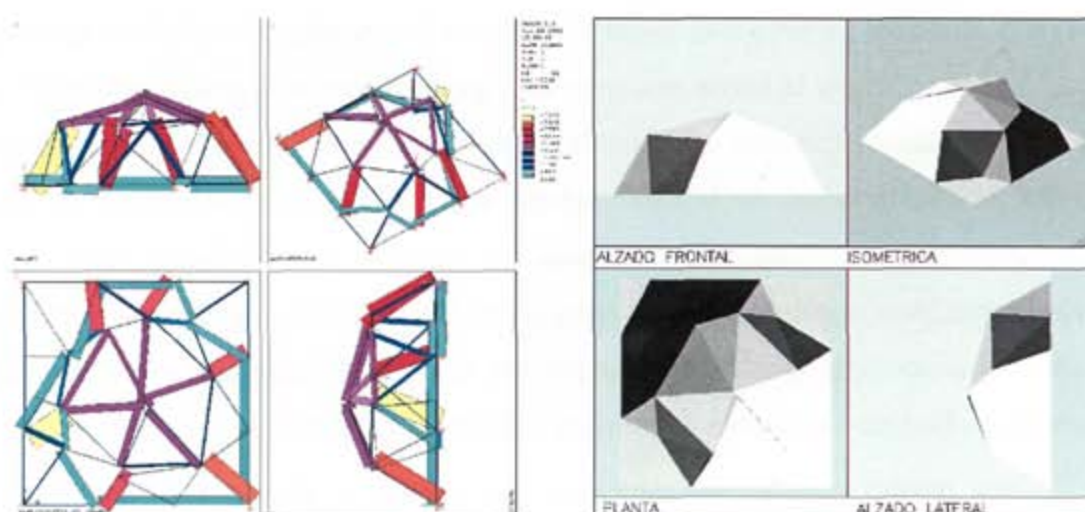


figura 6. 4: Solución final,  $V_s=3.649 \text{ e}06\text{kN.m}$

Gracias al proceso del recocido las características del diseño inicial no influyen en la obtención del diseño final. En este caso tampoco se conservan las características de las primeras configuraciones estudiadas, una superficie con múltiples plegaduras que la proporcionan gran rigidez.

## **6.2 La forma de las soluciones**

En este apartado se pretende mostrar el comportamiento general de las soluciones encontradas. En ocasiones se observa que hay características comunes a todos los casos estudiados, se exponen los rasgos que más se repiten. En otras estos rasgos dependen del tipo de problema, por lo que se agrupan en función de cada caso.

Como rasgo más general de las estructuras tipo lámina, se observa que la forma está íntimamente ligada con el modo de trabajo de los elementos y su colaboración en el conjunto. Gracias a ese ajuste en el diseño de la forma, se consigue reducir considerablemente el volumen estructural.

### **6.2.1 Características generales en recinto completo y positivo.**

Se pueden distinguir dos grandes grupos de soluciones que siguen una misma pauta en función de que el tipo de recinto sea completo o positivo.

Para recinto completo aparecen unas estructuras principales formadas por un arco y una catenaria coincidentes en el arranque, de esta manera se alcanza la esbeltez total de la solución. La estructura queda dividida en dos partes, sobre el plano de apoyo y bajo él, separadas por la pareja arco-catenaria que se forma en la unión. Para cubrir la totalidad del espacio aparecen una serie de segmentos de arco a compresión en la mitad superior, lo mismo sucede en la mitad inferior con segmentos de catenaria a tracción. Estos segmentos provocan unos empujes, de tracción para regiones positivas y compresiones para negativas, que se compensan con una leve inclinación global del sistema arco-catenaria que da la componente horizontal necesaria a los sistemas secundarios. En estas soluciones se consigue reducir los esfuerzos en la cota de apoyos.

Para recinto positivo las soluciones son cupulares, con trazados parabólicos donde, los empujes que provocan, se resuelven en el anillo de la base. Debido a la forma parabólica que adoptan, no se necesitan anillos intermedios.

En ambos casos, si la base lo permite, se forma un anillo en la que se lleva los empujes mediante tracciones o compresiones, según se necesite, como se ha visto. Si el perímetro tiene esquinas (base cuadrada o rectangular) intenta acercarse a un modelo de bordes redondeados, mediante el cambio de topología las barras se disponen formando arcos de circunferencia, por lo que las barras que forman la esquina a penas trabajan. En ocasiones aparece una superficie horizontal plana entre el borde real y el borde estructural.

6.2.2 Ritmo de repetición

Cuando las estructuras estudiadas tienen una base de proporción alargada, se observa una repetición de las soluciones más sencillas, que ya aparecían en los casos de base circular o base cuadrada. Como ejemplo más destacado se muestra la solución al problema de base rectangular de proporción 3/1 con recinto completo, para una longitud de barra máxima del 40% del lado corto de la base (figura 6. 5), en relación al diseño análogo con base rectangular 2/1 y con el de base cuadrada. Se observa la repetición de la solución de base cuadrada tantas veces como la proporción de los lados del rectángulo.

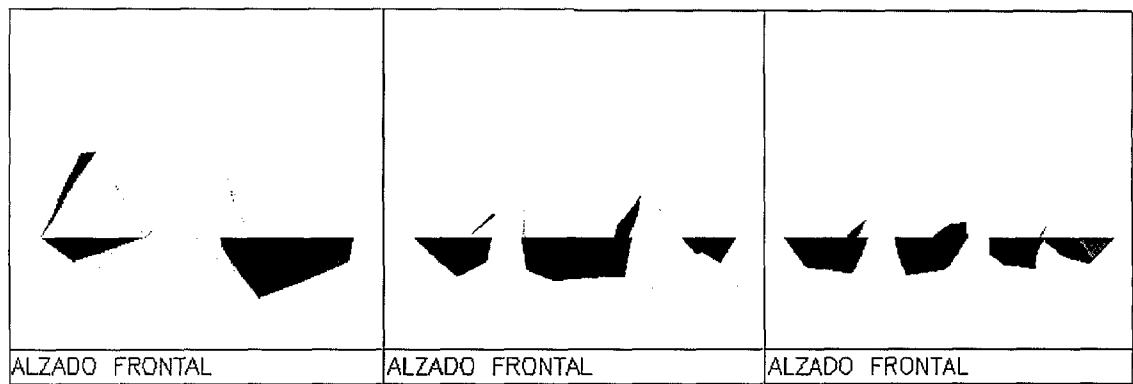


figura 6. 5: Comparativa de los alzados de los diseños de recinto completo para  $L_{max}=40\%$  con base cuadrada (izquierda), base rectangular 2/1 (centro) y base rectangular 3/1 (derecha).

Intentando generalizar se podría decir que el número de repeticiones dependerá de la proporción entre los lados de la superficie a cubrir. Se observa por regla general que se cumple la siguiente relación:

$$r=L/l$$

(6. 1)

- $L$

luz larga
- $l$

luz corta
- $r$

número de repeticiones de la solución

Es decir, para proporciones cuadradas de lado L aparece 1 vez la solución (arco-catenaria o cúpula), mientras que para proporciones alargadas de proporción 2/1 aparecen 2 veces y así sucesivamente.

El único diseño que no sigue esta pauta es el que aparece en la solución al problema de base mixta con recinto completo y longitud máxima de barras del 40% de la luz mínima salvada. Esto es debido a la configuración en planta de la base, con el límite en semicircunferencia que facilita la formación de dos cúpulas yuxtapuestas de sentido contrario. Esto no sucederá en el caso análogo de base rectangular.

A continuación (tabla 6. 1) se comparan los valores del volumen estructural de estas tres configuraciones; al dividirlo entre la carga por unidad de superficie,  $q$ , el área cubierta y la luz corta, se logra una magnitud adimensional que sirve para relacionar estas configuraciones, a esta magnitud adimensional se le ha denominado *volumen estructural reducido* representándolo por  $\omega$ .

BASE	CUADRADA	RECTANGULAR 2/1	RECTANGULAR 3/1
$V_s$	2.662 e06 kN.m	0.884 e06 kN.m	1.493 e06 kN.m
$q \cdot A \cdot l$	4.5*10000*100 kN.m	4.5*5000*50 kN.m	4.5*7500*50 kN.m
$\omega=V_s/ q \cdot A \cdot l$	0.592	0.786	0.885

tabla 6. 1. Comparativa de valores.

Los valores de  $\omega$  tienen una secuencia relativamente lógica: cuanto más rectangular más costoso.

Se podría decir que en soluciones de proporción rectangular hay un sobre coste por tener que resolver el problema en una única dirección en las zonas centrales mientras que en las extremas, al igual que sucede en soluciones de proporción cuadrada el problema se resuelve en dos direcciones (figura 6. 6).

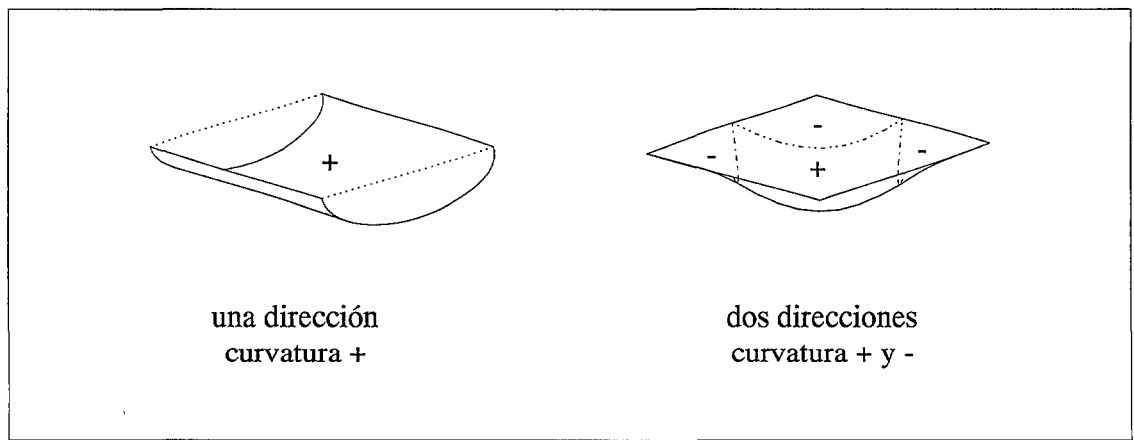


figura 6. 6: Dos maneras de llevar la carga a los apoyos, en una o dos direcciones.

Se pueden establecer dos coeficientes del coste en función de la proporción de volumen estructural reducido destinado a resolver el problema de manera unidireccional o bidireccional, que tienen que ver con el apoyo en todo el contorno o el apoyo en dos lados opuestos.

- $C_r$  coeficiente de trabajo en una dirección, o de apoyo en lados opuestos.
- $C_c$  coeficiente de trabajo en dos direcciones, o de apoyo en contorno.

Si se considera que el ejemplo de base cuadrada destina el 100% a resolverlo de manera bidireccional, este coeficiente sería  $C_c = 0.592$

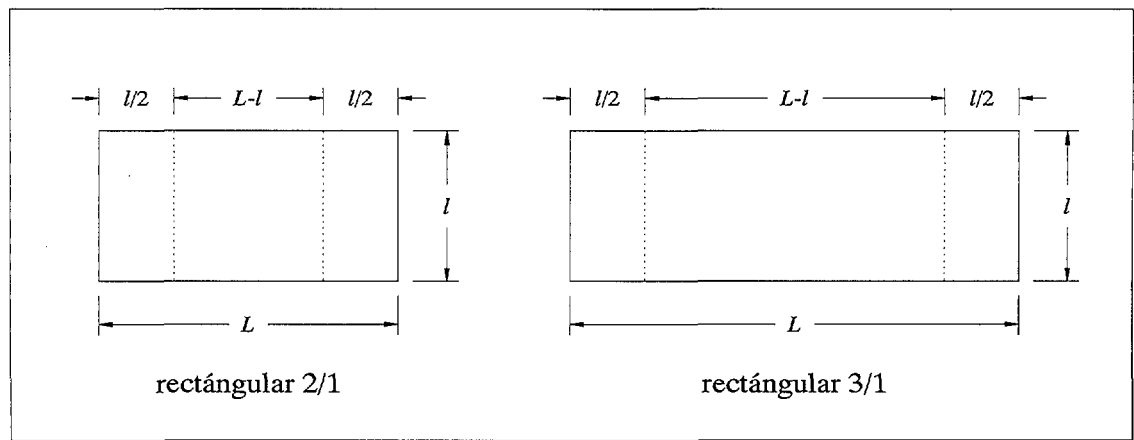


figura 6. 7: Dimensiones.

En una base rectangular de lados  $L$  y  $l$  de proporciones 2/1 y 3/1, como en los ejemplos mostrados, el volumen estructural se ha de repartir según la siguiente igualdad (figura 6. 7):

$$\frac{(L-l) \cdot Cr + l \cdot Cc}{L} = \omega$$

$L$  luz larga

$l$  luz corta

En caso de proporción 2/1, si  $Cc = 0.592$ :

$$\frac{(L-l) \cdot Cr + l \cdot Cc}{L} = 0.5 \cdot Cr + 0.5 \cdot Cc = 0.786 \quad ; \quad Cr=0.98$$

Con base rectangular 3/1 si  $Cc = 0.592$ :

$$\frac{(L-l) \cdot Cr + l \cdot Cc}{L} = 0.66 \cdot Cr + 0.33 \cdot Cc = 0.885 \quad ; \quad Cr=1.04$$

Como se puede observar los valores obtenidos de  $Cr$  son muy similares en ambos casos.

De este modo el coste que no puede reducirse en soluciones de recinto completo sería  $0.6 \cdot q \cdot A \cdot l$ , para las regiones con apoyo en el perímetro, más  $1.0 \cdot q \cdot A \cdot l$  para las regiones con apoyos paralelos.

### 6.2.3 Número de nudos.

Otra característica de las soluciones es que con frecuencia aparecen nudos a los que acometen barras con una sollicitación muy baja. Como se ha visto no se pueden considerar nudos superfluos pues todos los nudos tienen carga, además, en el proceso, no se considera el cambio de número de nudos. Sin embargo esto puede indicar que, si se permitiese este cambio, la tendencia sería a reducir el número de nudos. Esto se confirma al observar el comportamiento general del proceso de búsqueda, se aprecia que en estructuras similares con menos nudos el volumen estructural es menor, en parte se debe a que cada nudo se llevará mayor carga, incluidos los apoyados, lo que hace que la carga total soportada por los nudos variables sea menor.



#### 6.2.4 Concentración o reparto de tensiones.

El comportamiento general de todas las soluciones, independientemente de la geometría de base o del recinto, consiste en la concentración de las solicitaciones en unos pocos elementos, lo que jerarquiza la solución en una serie de elementos principales (arco-catenaria o cúpula-anillo, según el caso) que se llevan las mayores solicitaciones y por otra parte unos elementos secundarios con un menor grado de solicitación, hasta unos elementos de solicitación casi nula. Esto sucede así debido al modo en que se realiza el análisis de las estructuras y a un dimensionado discreto de los elementos. Por una parte contrasta con el comportamiento habitual de las láminas con distribución continua de tensiones y por otra destacar que la concentración de tensiones es también un fenómeno natural en muchas ocasiones, un claro ejemplo aparece en las hojas de las plantas.

Quizás el ejemplo más representativo en esta ocasión sea el estudiado en el apartado 5.8 de base cuadrada con apoyos puntuales, donde en la estructura inicial proyectada por H. Isler, es una estructura buena con uniformidad de tensiones (ya se observaba que esta configuración posee las características de un diseño óptimo). Sin embargo la solución encontrada tiende a la concentración de tensiones en unos pocos elementos conformando unos arcos y, por lo tanto, correspondería a un diseño óptimo con un dimensionado discreto.

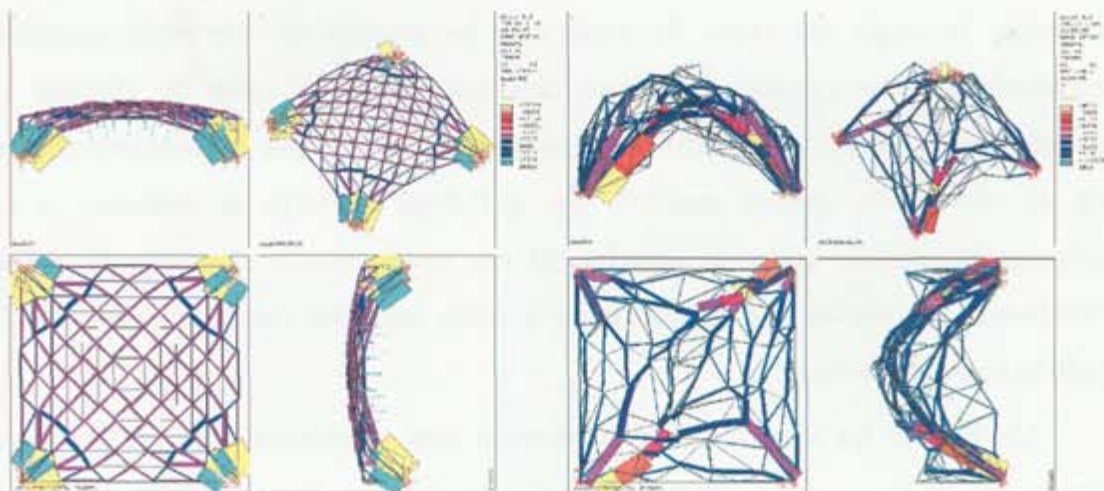


figura 6. 8: Comparativa diseño de base cuadrada con los apoyos en las esquinas. Distribución de tensiones continua (izquierda) o concentración de tensiones (derecha)



Esta concentración está ligada al dimensionado axial, cabría pensar qué pasaría si se simulase un comportamiento superficial de resistencia análoga en tres direcciones, eso supondría unas configuraciones de dimensionado uniforme al menos por regiones, lo que abre una nueva investigación. Podría apuntarse en esa dirección con este programa 1.- asegurando a cada barra resistencia igual al valor del mayor esfuerzo normal de los de todas las barras que concurren al mismo nudo, 2.- aunque sería mejor un enfoque distribuido.

### 6.2.5 Superficies

A la concentración de tensiones que se acaba de mostrar, se une la característica geométrica de las superficies, una alta rugosidad.

Ya se veía en el apartado (6.1) como en las primera etapas del proceso, se conseguían las primeras mejoras del diseño dotando a la superficie de una serie de plegaduras que le permiten adquirir una mayor rigidez. Llama la atención este comportamiento cuando se compara con el proceso de optimación de cerchas (Vázquez, 1994) donde desde las primeras etapas las estructuras adquirirían la esbeltez casi definitiva.

Estos pliegues se abandonan progresivamente cuando se afina la forma, de modo que la cualidad fundamental no sería la aportada por los pliegues sino otra. Tal vez sea más importante al principio la mejora del ángulo en el apoyo de las piezas que transportan la carga, los arcos, de modo que las pruebas tal vez están asociadas esencialmente a ese cambio de ángulo, aun cuando sea a costa de eliminar la homogeneidad inicial, que, posteriormente, se recupera, con lo que el parámetro central sería el número de apoyos mediante los que llega la carga al contorno, y su configuración, incluso como se resuelve en esa configuración el efecto de anillo, minimizando los anillos que no dan lugar a canto adicional (en recinto completo), siendo lo menos importante.

Muchos de los diseños finales conservan esas plegaduras pues gracias a los pliegues locales se consigue aumentar el canto localmente. Esto se facilita en mayor medida en los casos de mayor número de nudos.

Claros ejemplos de esta labor casi de papiroflexia se encuentran en las soluciones de base circular con longitud de barras del 30% de la luz, para recinto positivo, o en base cuadrada la solución al problema de apoyos puntuales. Ambas se muestran en la figura 6. 9.

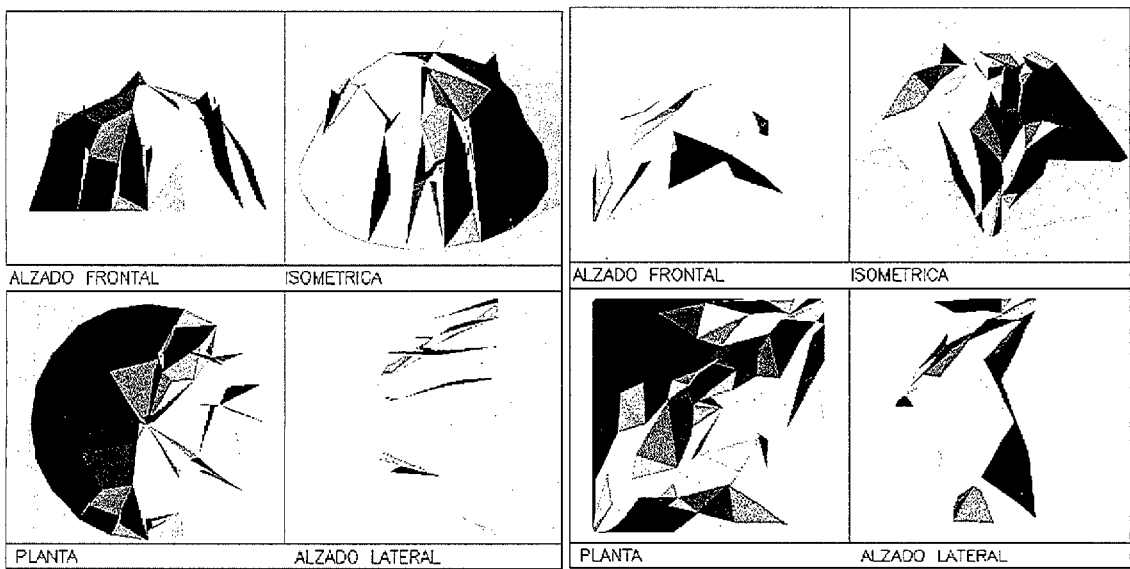


figura 6. 9: Ejemplos de las multiples plegaduras de la superficie de la lámina, base circular (izquierda) y base cuadrada (derecha)

Parece en todo caso que simultáneamente a la configuración de arcos-catenaria eficaces, se trata de apoyar cargas localmente en estos mediante “flexiones” locales con cantos importantes y esfuerzos reducidos para los que pequeños cambios de inclinación en arcos principales aportan las componentes oblicuas precisas para el equilibrio. Esto hace muy variables las posibles soluciones, cuyas configuraciones merecerían la pena explorar con más detalle en el futuro.

Comparando estas formas, complejas y con plegaduras, con las superficies mínimas teóricas en problemas de burbujas, lisas y esféricas podría decirse que el número finito de barras imposibilita soluciones continuas. El resultado a de ser discreto indefectiblemente. Se trata de un problema que cruza tensiones normales de tracción y compresión, al tratarse de un problema de flexión global, en el que además no se desprecian los esfuerzos de empuje de los anillos que cierran el equilibrio. Los cruces óptimos, tracción-compresión se producen a 90°, según el corolario del teorema de

Michell, lo que facilita la existencia de dos familias cruzadas arco-catenaria, que a veces forman piezas completas tipo cercha.

No se ha sabido desentrañar aún los patrones de los pliegues cuando se producen, son más complejos que los simples semejantes a acordeones de las versiones básicas de bóvedas o cúpulas de la papiroflexia. Esto abre las puertas a un interesante nuevo campo de investigación.

### 6.2.6 Luces salvadas

La luz total a salvar por las láminas queda definida con la geometría de la base, sin embargo las soluciones tienden a encontrar como salvar una luz menor.

En caso de recinto completo se crea una estructura arco-catenaria que nunca salva la luz mayor. Un claro ejemplo lo podemos encontrar en la solución al problema de base circular con recinto completo para longitudes de barra máximas del 40% de la luz total. Como se ve en la figura 6. 10, la luz que salva el arco-catenaria no es la mayor posible (la que une dos puntos de apoyo diagonalmente opuestos) sino una menor. Con base cuadrada la solución es similar.

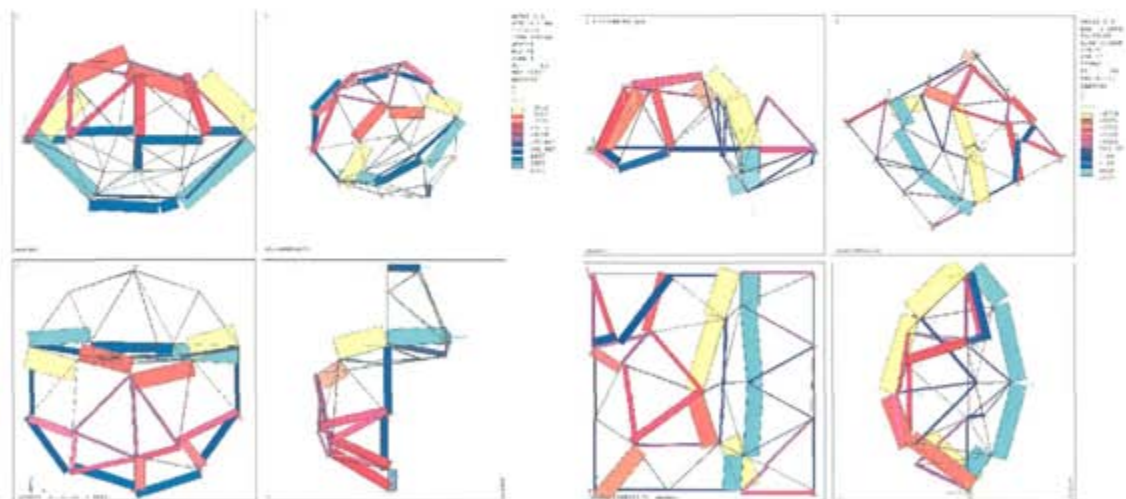


figura 6. 10: Ejemplos de luces salvadas con base circular y cuadrada.

Al plantearse si diseños simétricos serían mejores, se observa que en ese caso sería necesario un aumento del canto del arco-catenaria, tal vez desplazándose más al centro, de este modo el efecto de arrastre lateral que da origen al anillo traccionado,

como compensación de los arcos transversales secundarios, también sería necesario en el recinto negativo dando origen igualmente a una fracción de anillo comprimido, compensando las tracciones de catenarias secundarias transversales. Por lo tanto no puede afirmarse que esto mejore el conjunto, de hecho debe influir la longitud de las barras y el traslado de parte de carga al apoyo, en que las soluciones resulten simétricas, uno de los lados se aprovecha del traslado al apoyo y en el otro la solución que minimizaría el anillo y los arcos transversales.

Con base de proporciones rectangulares se recurre al mismo sistema arco-catenaria que salvan la luz que corresponde con la longitud del lado corto de la base. Este comportamiento está directamente relacionado con el modo de trabajo de la estructura visto en el apartado (6.2.2).

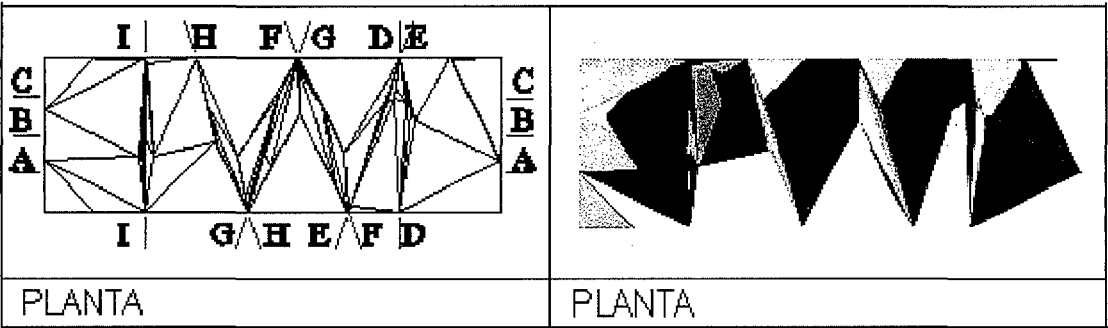


figura 6. 11: Ejemplo de luces salvadas con base rectangular.

En recinto positivo este fenómeno se traduce en una reducción del desarrollo del anillo a tracción, en vez de aprovechar las barras que forman la base y unir todos los nudos apoyados, se reduce la longitud uniendo puntos más cercanos. Ejemplos de este comportamiento aparecen en los diseños de base circular o cuadrada (figura 6. 12), donde, al utilizar este recurso, el anillo de la base se conforma por un polígono de menor número de lados, en caso de base circular, o un cuadrado girado, cuando la base es cuadrada.

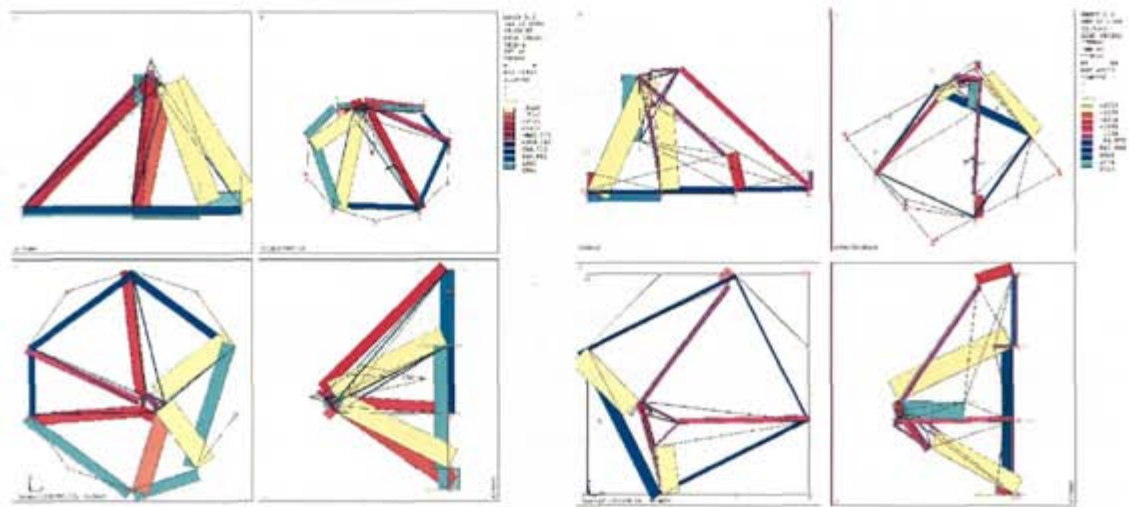


figura 6. 12: Ejemplos de disminución del desarrollo del anillo a tracción

En caso de bases de proporciones rectangulares, esto se traduce a la repetición de las cúpulas o arcos, salvando siempre la luz del lado corto. Un ejemplo se puede encontrar en la solución de base rectangular de proporción 3/1 con longitud de barra del 40% del total del lado corto como aparece en la figura 6. 13.

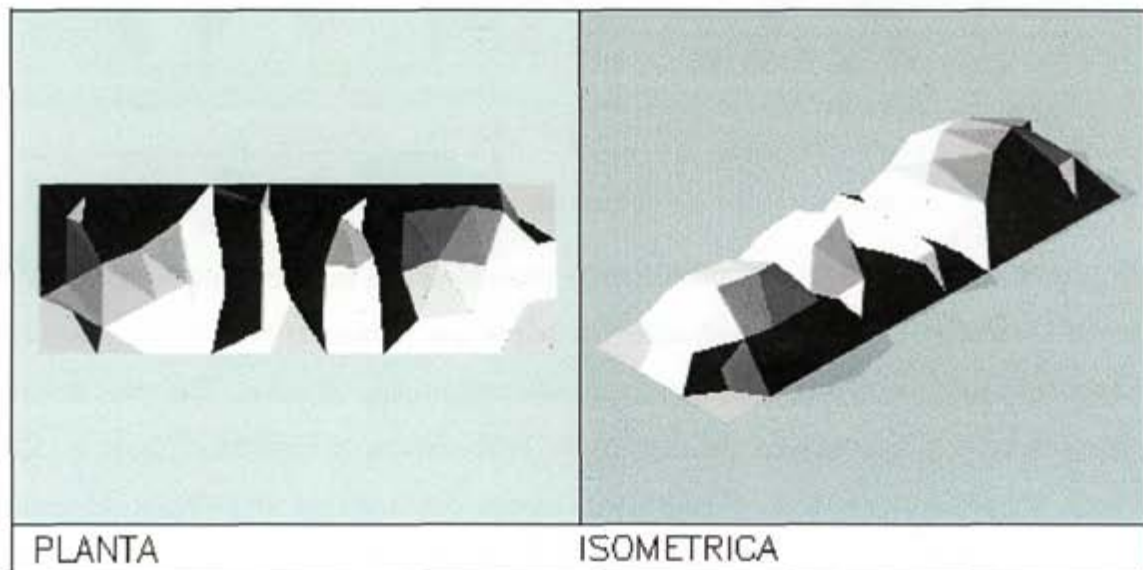


figura 6. 13: Ejemplos de luces salvadas en recinto positivo con base rectangular.

### 6.2.7 Esbelteces y cantos.

Quizás el canto total alcanzado, y con ello la esbeltez del diseño, sea la característica más significativa de este tipo de estructuras, y el principal factor de forma

que se plantearía el proyectista a la hora de enfrentarse al diseño de una lámina. Por ello en el apartado (6.4) se han analizado todas las soluciones con mayor profundidad comparándolas entre sí mediante una exposición más exhaustiva, antes de establecer unos parámetros generales en este sentido.

### **6.3 Limitaciones impuestas a la búsqueda.**

Se ha observado la tendencia del recocido simulado a encontrar la mejor solución posible, no importa la vía para llevar a cabo su propósito. En ocasiones la búsqueda provoca cambios que están dentro de lo que cabría esperar, una estructura aceptable en el sentido más amplio (no solo en el sentido analítico del programa), y que por tanto esté dentro de las condiciones del problema, por ejemplo las modificaciones de geometría y topología implican un cambio del canto en las soluciones. En otras ocasiones el algoritmo encuentra la mejor solución escapando del problema, como se ha visto se consume menos volumen estructural si los nudos sobre los que se aplica la carga están lo más cerca posible de los nudos de apoyo. Esto se facilita por dos vías, aumentando la longitud de las barras y disminuyendo el número de nudos. Por ello se han impuesto algunas limitaciones aplicadas durante el proceso de búsqueda. La primera consiste en no cambiar el número de nudos, también se ha visto la importancia de limitar la longitud máxima de las barras.

#### **6.3.1 Longitudes máximas de barras**

Desde los primeros tanteos se observó la tendencia, por parte del algoritmo, a soluciones con barras excesivamente largas, de esta manera se escapa del problema de resolver la flexión. Por ello se decide limitar la longitud máxima de las barras, convirtiéndose éste en un parámetro que influye notablemente en la solución encontrada.

Siempre que puede el algoritmo lleva la mayor parte de carga posible directamente a los nudos de apoyo o muy cerca de éstos. Cuanto más largas son las barras más fácilmente consigue esto, por una parte porque el área que corresponde a cada nudo es mayor, por o tanto más fácil concentrar la carga en unos pocos nudos, apoyados o variables. Por otra porque es más fácil mover los nudos ubicándolos cerca

de los apoyos para reducir el recorrido de las cargas. Por ello, en general las soluciones encontradas con barras largas acaban trasladando una proporción menor de carga, la aplicada sobre nudos variables, con recorridos de cargas muy cortos.

Por otra parte, para longitudes de barra cortas se limita en demasía la posibilidad de búsqueda en configuraciones de cantos mayores. Por tanto parecería oportuno, de cara a futuras investigaciones en esta línea, el mantener la limitación de la longitud de barras pero de una forma más difusa de cómo se ha estudiado en el capítulo anterior. Existen numerosas maneras de hacerlo, unas más complicadas y otras más sencillas. Una de ellas podría ser incluir una penalización que aumentase el axil de la barra en función de su longitud, así aumentaría el valor del volumen estructural, pero en el procedimiento general no se han incluido penalizaciones por lo que, de esta manera, se cambiaría de estrategia. Otra manera sería incluir el peso propio de la barra, incluyendo la flexión que provoca, pero eso resultaría un tanto complicado de implementar, debido a que no se puede dimensionar hasta después del análisis, y hasta entonces no se conocería el valor de la carga debida al peso propio. Una tercera manera posible sería incluir el peso propio en función de las áreas de los triángulos adyacentes en verdadera magnitud, no en su proyección horizontal como se ha hecho hasta ahora, de esta manera se aplicaría al mismo tiempo el peso propio de la estructura, y se penalizarían las barras más largas, una pega de esta vía es que se compararían estructuras que soportan cargas diferentes, su propio peso. Una última implementación que también limitaría la longitud sería introducir la consideración del pandeo en las barras comprimidas, esto requiere un predimensionado previo en función de un catálogo de secciones y, de esta manera, no se limitarían las barras traccionadas por lo que no se aconseja su inclusión independientemente sino unida a la consideración del peso propio como se acaba de describir. Todas estas estrategias son válidas pero cambiarían el enfoque del problema estudiado.

Por último, una mejora rápida y fácil de implementar, que no cambia el enfoque del problema, consiste en limitar la longitud de la barra en su proyección horizontal (plano XY) permitiendo que la longitud en verdadera magnitud tome el valor que sea necesario, según los criterios del recocido. De esta manera se permite la búsqueda en estructuras con cantos mayores.

Con intención de presentar un avance a posibles mejoras del programa, se han estudiado dos soluciones básicas con esta limitación. Se trata de encontrar la solución para base circular, con 101 nudos, con tamaño máximo de barra en proyección horizontal del 30% de la luz máxima ( es decir 30m para 100m de luz). Al igual que en casos anteriores se estudia el caso para recinto completo y positivo

6.3.2 Nueva búsqueda para base circular, recinto completo

En la figura 6. 14 se puede observar la solución encontrada por el programa en caso de limitar la longitud de las barras en proyección horizontal. De nuevo se observa como la solución sigue la misma pauta que en los ejemplos análogos del capítulo anterior. Aparece un arco-catenaria que divide la estructura en dos, sobre el nivel e apoyos y bajo éste, recinto positivo y negativo. La primera trabajando fundamentalmente a compresión y a tracción la segunda. El anillo de la base resiste los empujes que provocan las dos semicúpulas. La estructura arco-catenaria une dos puntos de la base que no son diagonalmente opuestos, por lo que la luz salvada no es la mayor de las posibles.

Se observa como las barras tienden a adquirir largas longitudes, el canto total así alcanzado es de 102m (no se han tenido en cuenta las barras que sobresalen y tienen una sollicitación cercana a nula.). La carga aplicada directamente en los apoyos ha aumentado respecto del ejemplo análogo con la limitación de la longitud de barra en verdadera magnitud del 19% al 33% del total por lo que solo el 67% de la carga está aplicada en los nudos variables.

El desglose de volumen estructural se puede ver en la tabla 6. 2 donde se observa que los valores de traslado de carga en horizontal y vertical son muy similares por lo que es este caso no es necesaria una transformación afin que mejore el diseño.

	Vs=	VsII	
Vs+	0.446 e06	0.316 e06	0.762 e06
Vs-	0.446 e06	0.544 e06	0.990 e06
	0.892 e06	0.860 e06	1.752 e06

tabla 6. 2: Volumen estructural desglosado.





El desglose de trabajo horizontal da valores idénticos para compresión y para tracción, lo que indica la nula influencia de los apoyos horizontales en el reparto del trabajo. Sin embargo en el desglose de la componente vertical da valores diferentes, siendo mayor la compresión a la tracción, esto revela que aun se podría mejorar ligeramente el diseño. Si se observa con atención la figura 6. 14, en el alzado de arriba a la izquierda, se observa un pequeño arco a compresión (en rojo), está en recinto positivo cuando en esa zona el diseño está globalmente bajo el plano de apoyo.

El volumen estructural es menor al de la solución análoga con la limitación de la longitud de las barras en verdadera magnitud (apartado 5.6.6). El canto alcanzado es mayor incluso que el obtenido mediante la transformación afin correspondiente.

### 6.3.3 Nueva búsqueda para base circular, recinto positivo

En la figura 6. 15 se puede observar la solución encontrada en caso de limitar la longitud de las barras en proyección horizontal. Se puede observar como el canto de esta solución es mayor a la obtenida con el ejemplo similar que limitaba la longitud de la barra en verdadera magnitud, en dicho ejemplo el canto obtenido era de 59.25m y mediante la transformación afin, se obtenía un canto de 63.94. En este caso aumenta aún más, hasta 66.79m, (para medir el canto total no se han tenido en cuenta las barras que sobresalen y tienen una sollicitación cercana a ser nula.).

La forma obtenida tiene muchos rasgos comunes con las soluciones anteriores en las que se limitaba la longitud de barra en verdadera magnitud, con un perfil entre parabólico mucho más apuntado, casi llegando a ser piramidal. esta configuración se encuentra en una posición intermedia entre la encontrada para  $l_{max}=80\%$  y la de  $l_{max}=40\%$ . Esta forma facilita que gran parte de la carga vaya directamente a los apoyos, así este valor que era del 2% en la solución inicial, aumenta al 39% , también mayor que el 21% que mostraba la solución análoga del capítulo anterior.

También se observa que se ha reducido el volumen estructural, de 2.156 e06 kN.m o 2.149 e06 kN.m mediante la transformación afin de la solución del capítulo anterior, se ha conseguido en esta ocasión reducirlo hasta 2.021 e06 kN.m.

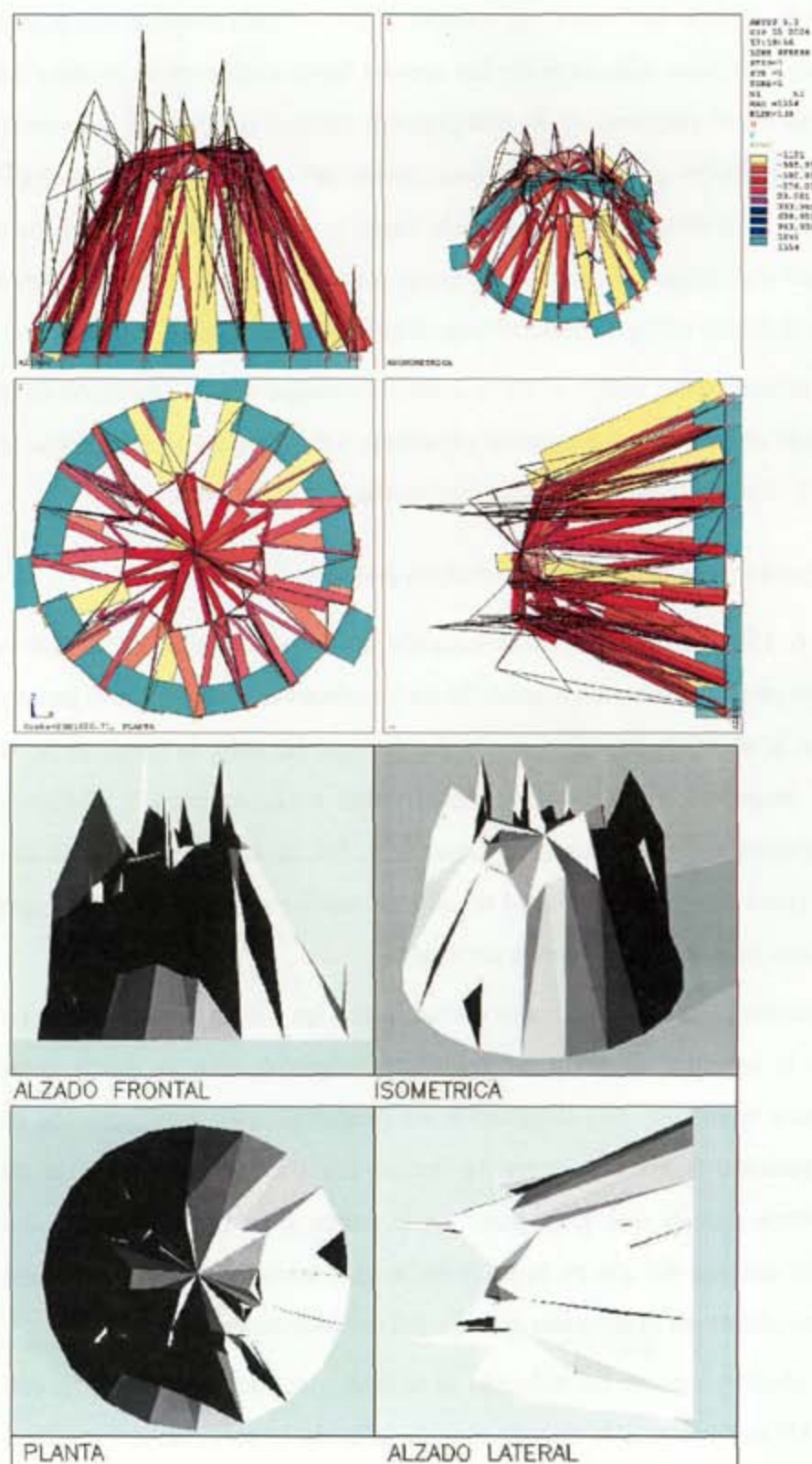


figura 6. 15: Solución para  $L_{max}=30\%$  en proyección horizontal, recinto positivo,  $V_s = 2.021 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .

El desglose de este volumen se puede ver en la tabla 6. 3. Los valores de traslado de carga en horizontal y vertical son muy similares, ligeramente mayor el vertical, lo que indica que no es necesaria una transformación afín que mejore el diseño, o en todo caso la mejora pasaría por una ligera disminución del canto.

El desglose de trabajo horizontal da valores idénticos para compresión y para tracción, lo que indica la nula influencia de los apoyos horizontales en el reparto del trabajo. En el desglose de la componente vertical se observa como, al ser un diseño de recinto positivo, el trabajo a compresión es mayor, que el de tracción (casi nulo).

	Vs=	VsII	
Vs+	0.461 e06	0.004 e06	0.465 e06
Vs-	0.461 e06	1.095 e06	1.556 e06
	0.922 e06	1.099 e06	2.021 e06

tabla 6. 3: Volumen estructural desglosado.

Esta configuración y la anterior muestran claramente esa labor casi de papiroflexia de la que se hablaba en el apartado (6.2.5), la rigidez se logra mediante múltiples plegaduras de la superficie.

6.4 Relaciones entre los resultados obtenidos

A continuación se ponen en paralelo el resumen de resultados encontrados en recinto completo y positivo, con el fin de encontrar las relaciones que puede haber entre los valores de volumen estructural y entre las esbelteces. Se comienza con una visión general de los valores desglosados de volumen estructural, para pasar a comparar uno a uno los distintos ejemplos estudiados

6.4.1 Relaciones entre los valores desglosados de volumen estructural

En los cuadros de desglose del volumen estructural del capítulo anterior, se aprecian, por regla general, que las componentes de trabajo debido a traslados de carga en horizontal (tracción y compresión) siempre son iguales. Esto se debe a que, con el fin de comparar diseños equivalentes, tanto en la configuración de partida como en la final,

las coacciones horizontales están dispuestas de tal manera que no colaboran en el reparto del trabajo.

Por otra parte en el trabajo correspondiente a traslados de carga en vertical, deberían ser iguales los términos de tracción y compresión para los diseños de recinto completo. Si no se cumple esta relación, indica que el diseño se podría mejorar compensando la geometría entre recinto positivo y negativo. En caso de los diseños de recinto positivo siempre debe ser mayor la componente de compresión, y así sucede.

Por último la relación entre traslados de carga en horizontal y vertical deberían ser iguales, es una característica de los diseños óptimos. Si la solución encontrada no posee esta característica, el diseño es mejorable mediante una transformación afín mediante el factor  $\kappa$ . En todos los casos en que se podía obtener esta mejora, se ha conseguido el valor del factor de proporción  $\kappa$ . Esta relación sirve también para verificar la cercanía de las soluciones al óptimo, y se ha comprobado que el termino medio  $\kappa$  es igual a 1.29 y la mejora de las soluciones que se obtiene es del 4.7%, lo que indica una alta fiabilidad de la soluciones obtenidas.

El *volumen estructural reducido* ,  $\omega$ , mostrado antes, tiene sentido cuando se están comparando diseños con distintas formas de base entre sí, en caso contrario la comparación es idéntica a utilizar el volumen estructura  $V_s$  tal y como se hace a continuación.

#### 6.4.2 Base circular

A continuación se exponen una serie de tablas comparativas de las soluciones con base circular. El fin es encontrar si existe una relación entre el volumen estructural para recinto completo y positivo y su valor. Para ello se ha elaborado la tabla 6. 4. En esta serie de ejemplos la longitud de las barras va disminuyendo del 80% de la luz al 40% y al 30%, como se indica en la primera columna de cada tabla, también se ha incluido la solución en recinto positivo para longitudes de barras del 20% de la luz. En los dos primeros casos el número de nudos es el mismo, 26, mientras que en los dos últimos son 101 nudos.

En general se aprecia que las soluciones de recinto completo son mejores a las de recinto positivo, algo lógico pues el problema planteado para recinto completo incluye las soluciones de recinto positivo.

Se observa como el volumen estructural va en aumento según disminuye la longitud de las barras tanto en recinto completo como positivo.

	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$	SOLUCION AFIN	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$
80%	0.754 e06	1.373 e06	0.55	80%	0.743 e06	1.353 e06	0.55
40%	1.822 e06	2.056 e06	0.89	40%	1.717 e06	2.053 e06	0.84
30%	1.932 e06	2.155 e06	0.90	30%	1.919 e06	2.149 e06	0.89
20%	-	2.268 e06	-	20%	-	2.210 e06	-

tabla 6. 4: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base circular.

En caso de recinto completo el volumen estructural siempre es menor, de 0.55 hasta 0.90 veces al correspondiente a recinto positivo, esta relación aumenta conforme la longitud de las barras es menor. Se puede ver como después de haber realizado la transformación afín necesaria para igualar el trabajo en traslados horizontales y verticales, las proporciones entre recinto completo y positivo se mantienen prácticamente invariables.

Incluyendo en esta relación la última solución estudiada, con la limitación de la longitud de las barras en proyección horizontal, se observa que esta relación se mantiene dentro del mismo orden de valores.

	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$
30%	1.752 e06	2.021 e06	0.87

tabla 6. 5: Relación de volumen estructural para *lmax* en proyección horizontal.

Al comparar las esbelteces de las soluciones se aprecia su tendencia a aumentar conforme las barras son más cortas. Notar que el salto entre la solución de *lmax*=40% y *lmax*=30% es debido al cambio de número de nudos.

En la relación de esbelteces que se muestra en la tabla 6. 6, se puede apreciar que en general las soluciones de recinto completo son menos esbeltas que las de recinto positivo, la relación  $\lambda(Rc)/\lambda(Rp)$  disminuye de 0.85 a 0.78 según disminuye la longitud máxima de la barras. Una vez se ha efectuado la transformación afin, los cantos han aumentado por lo general por lo que las soluciones son menos esbeltas en todos los casos, lo que hace que las esbelteces disminuyan de 6 a 15% en recinto positivo y de 11 a 29% en recinto completo. La relación de esbelteces después de la transformación afin permanece en valores del mismo orden o menores.

	$\lambda(Rc)$	$\lambda(Rp)$	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$\lambda(Rc)$	$\lambda(Rp)$	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$
80%	1.51	1.78	0.85	80%	1.27	1.5	0.85
40%	1.64	1.88	0.87	40%	1.16	1.77	0.66
30%	1.32	1.69	0.78	30%	1.18	1.56	0.76
20%	-	2.2	-	20%	-	1.75	-

tabla 6. 6: Relación de esbeteces en recinto completo y positivo. Base circular.

Incluyendo en esta relación la última solución estudiada con la limitación de la longitud de las barras en proyección horizontal, se observa un aumento general del canto, más brusco en el caso de recinto completo, cuando se compara con la solución transformada la solución de recinto positivo toma valores del mismo orden mientras en recinto completo permanece muy alejado, por ello la relación  $\lambda(Rc)/\lambda(Rp)$  es la menor de todas.

	$\lambda \text{ (Rc)}$	$\lambda \text{ (Rp)}$	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$
30%	0.98	1.50	0.65

tabla 6. 7: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo para  $l_{max}$  en proyección horizontal.

6.4.3 Base cuadrada

Al igual que en el caso anterior se va a estudiar las relaciones de volumen estructural y esbelteces entre recinto completo y positivo, en esta ocasión con las soluciones para base cuadrada. No se ha incluido en este apartado el ejemplo de apoyos puntuales en las cuatro equinas, al haberse estudiado únicamente en recinto positivo.

En este caso la longitud de las barras va disminuyendo del 80% de la luz al 40% y al 30%. En los dos primeros casos con el mismo número de nudos, 25, y en el último con 86 nudos.

La regla de aumentar el volumen estructural cuando la longitud de las barras decrece, se apreciaba en los ejemplos de base circular, vuelve a aparecer aquí aunque no se ve tan claramente en este caso debido a la influencia del cambio de número de nudos que se produce entre los casos de  $l_{max}=40\%$  y  $l_{max}=30\%$ .

La relación  $Vs(Rc)/Vs(Rp)$  es del orden de 0.80 a 0.86, este es el único caso en el que disminuye con longitudes de barras menores aunque cambie el número de nudos. Después de realizar la transformación afín correspondiente, en casi todas las estructuras desciende su volumen estructural, hasta un máximo de 13%, lo que provoca que la relación anterior disminuya hasta tomar valores entre 0.77 y 0.83, estos valores son decrecientes con la longitud de las barras, notándose la influencia del cambio en el número de nudos.



	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$	SOLUCION AFIN	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$
80%	1.161 e06	1.345 e06	0.86	80%	1.121 e06	1.345 e06	0.83
40%	3.002 e06	3.649 e06	0.82	40%	2.606 e06	3.364 e06	0.77
30%	2.349 e06	2.934 e06	0.80	30%	2.215 e06	2.793 e06	0.79

tabla 6. 8: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base cuadrada.

En la tabla 6. 9 se distingue como las esbelteces aumentan al descender la longitud máxima de las barras, aunque al aumentar el número de nudos descende.

Por otra parte las soluciones de recinto positivo son más esbeltas, al no poder ocupar parte del espacio, por lo que la relación  $\lambda(Rc)/\lambda(Rp)$  toma valores entre 0.69 y 0.98, parece que tienen tendencia a crecer con longitudes de barra más cortas, el cambio de número de nudos a mayor entre las soluciones  $lmax=40\%$  y  $lmax=30\%$  provoca que descienda bruscamente e impide ver con más claridad esta evolución. Debido a la transformación afin los cantos aumentan, por lo que todas las soluciones son menos esbeltas, la relación entre esbelteces también decrece tomando valores de 0.55 a 0.86.

	$\lambda$ (Rc)	$\lambda$ (Rp)	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$\lambda$ (Rc)	$\lambda$ (Rp)	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$
80%	1.29	1.85	0.69	80%	0.99	1.8	0.55
40%	2.49	2.54	0.98	40%	1.45	1.69	0.86
30%	1.68	2.36	0.71	30%	1.19	1.72	0.69

tabla 6. 9: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base cuadrada.

6.4.4 Base Mixta

Para ver la relación de volumen estructural entre recinto completo y positivo con base mixta se ha elaborado la tabla 6. 10. No se han incluido los valores relativos a las soluciones con longitud de barra mayores a la luz salvada pues no son apropiados para

sacar conclusiones, recordar que estas configuraciones tendían a una serie barras verticales sobre los apoyos a compresión o tracción según cada caso.

En este caso se ha estudiado una configuración de 39 nudos con una longitud máxima de barra  $l_{max}=80\%$  y otra de 54 nudos para  $l_{max}=80\%$  y  $40\%$ .

El volumen estructural va en aumento al disminuir la longitud de las barras a pesar de que aumenta el número de nudos.

En general las soluciones de recinto completo son mejores, su volumen estructural es entre 0.79 y 0.92 veces el de la solución análoga de recinto positivo. Tras realizar la transformación afin sobre las soluciones, esta relación baja y toma valores entre 0.78 y 0.87, lo que indica que las soluciones de recinto completo mejoran relativamente más que la de recinto positivo.

Al aumentar el número de nudos se aprecia un aumento del volumen estructural independientemente del recinto al que pertenezcan las soluciones.

	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$	SOLUCION AFIN	Vs (Rc)	Vs (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$
80%(39n)	0.453 e06	0.545 e06	0.83	80%(39n)	0.440 e06	0.545 e06	0.80
80%(54n)	0.522 e06	0.658 e06	0.79	80%(54n)	0.504 e06	0.649 e06	0.78
40%(54n)	0.850 e06	0.928 e06	0.92	40%(54n)	0.752 e06	0.862 e06	0.87

tabla 6. 10: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base mixta.

En la relación entre esbelteces de la tabla 6. 11 se observa que son más esbeltos los diseños de recinto positivo, al igual que en ejemplos anteriores, en este caso la relación  $\lambda(Rc)/\lambda(Rp)$  varía entre 0.61 y 0.63. Tras la transformación afin esta relación disminuye y toma valores 0.50 y 0.57, lo que indica que los diseños de recinto completo disminuyen más que los de recinto positivo.

	$\lambda$ (Rc)	$\lambda$ (Rp)	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$\lambda$ (Rc)	$\lambda$ (Rp)	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$
80%(39n)	1.17	1.91	0.61	80%(39n)	0.92	1.85	0.50
80%(54n)	0.84	1.34	0.63	80%(54n)	0.64	1.13	0.57
40%(54n)	1.35	2.20	0.61	40%(54n)	0.82	1.49	0.55

tabla 6. 11: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base mixta.

6.4.5 Base rectangular 2/1

En este caso se han estudiado configuraciones con base rectangular de proporción 2 a 1. Todas las configuraciones tienen el mismo número de nudos, 46, por lo que solo cambia la longitud máxima que pueden tomar las barras.

Al comparar los resultados obtenidos, se observa (tabla 6. 12) que al disminuir la longitud de las barras, aumenta el volumen estructural de todas las soluciones. La relación  $Vs(Rc)/Vs(Rp)$  es de 0.66 a 0.74, aumentando con longitudes de barra cortas. Tras realizar la transformación afín que iguala el trabajo horizontal y el vertical, esta relación se reduce tomando valores entre 0.64 y 0.72. Mediante este cambio todas las soluciones han mejorado, en mayor proporción las de recinto completo.

	$Vs$ (Rc)	$Vs$ (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$Vs$ (Rc)	$Vs$ (Rp)	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$
80%	0.408 e06	0.620 e06	0.66	80%	0.392 e06	0.612 e06	0.64
40%	0.884 e06	1.189 e06	0.74	40%	0.728 e06	1.017 e06	0.72

tabla 6. 12: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base rectangular 2/1.

Al estudiar las esbelteces de estas soluciones, se aprecia como cuando desciende la longitud máxima de las barras ( $l_{max}$ ) la esbeltez crece. Comparando los se percibe que las soluciones para recinto completo son menos esbeltas, 0.57 y 0.71 la esbeltez de las soluciones de recinto positivo, siendo mayor esta relación al disminuir la longitud de

las barras. Tras realizar la transformación afín correspondiente esta relación disminuye a 0.59 y 0.65.

	$\lambda \text{ (Rc)}$	$\lambda \text{ (Rp)}$	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$\lambda \text{ (Rc)}$	$\lambda \text{ (Rp)}$	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$
80%	1.14	1.69	0.67	80%	0.85	1.43	0.59
40%	1.77	2.51	0.71	40%	0.93	1.42	0.65

tabla 6. 13: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base rectangular 2/1.

6.4.6 Base rectangular 3/1

Por último se confrontan las soluciones de base rectangular con proporción 3 a 1. En todos los casos el número de nudos es el mismo, 67, y tan solo varía la longitud máxima de barras (lmax) de 80% y 40% de la luz corta del rectángulo de la base.

En la tabla 6. 14 se muestra un resumen de los valores conseguidos, así como su relación. Se observa de nuevo como cuando la longitud de las barras descende, crece el volumen estructural, también se aprecia la relación de volumen estructural entre soluciones de recinto completo y positivo, antes y después de la transformación afín. Se ve como la relación  $Vs(Rc)/Vs(Rp)$  aumenta con la disminución de las longitudes de las barras, de 0.69 a 0.80. Esta relación también disminuye cuando se trata de las de soluciones afines, tomando los valores 0.66 y 0.76.

	$Vs \text{ (Rc)}$	$Vs \text{ (Rp)}$	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$Vs \text{ (Rc)}$	$Vs \text{ (Rp)}$	$\frac{Vs(Rc)}{Vs(Rp)}$
80%	0.689 e06	0.995 e06	0.69	80%	0.652 e06	0.992 e06	0.66
40%	1.494 e06	1.868 e06	0.80	40%	1.270 e06	1.676 e06	0.76

tabla 6. 14: Relación de volumen estructural en recinto completo y positivo. Base rectangular 3/1.

Las esbelteces de nuevo crecen al descender la longitud de las barras. Al compararlas se aprecia que las soluciones de recinto completo son menos esbeltas, del orden de 0.75 veces la esbeltez del diseño equivalente en recinto positivo. Este valor aumenta a 0.88 al disminuir las longitudes de las barras al 40%. Tras la transformación

afín esta relación disminuye hasta 0.58 y 0.78 lo que indica que disminuye más la esbeltez en los diseños de recinto completo.

	$\lambda$ (Rc)	$\lambda$ (Rp)	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$	SOLUCION AFIN	$\lambda$ (Rc)	$\lambda$ (Rp)	$\frac{\lambda(Rc)}{\lambda(Rp)}$
80%	1.06	1.41	0.75	80%	0.76	1.31	0.58
40%	1.89	2.15	0.88	40%	1.05	1.34	0.78

tabla 6. 15: Relación de esbelteces en recinto completo y positivo. Base rectangular 3/1.

## 6.5 Otros parámetros de forma

Además de los parámetros de los apartados anteriores se pueden extraer los siguientes parámetros que influyen en la configuración óptima, algunos de los cuales ya se han tratado aunque indirectamente:

- $\rho$  *parámetro de carga*, indica la forma de la carga, es la fracción de la luz que dista la resultante de cargas del apoyo. En la figura 6. 16 se indican los valores que toma en función de la forma de la carga aplicada, se percibe como disminuye según la carga se acerca más a los apoyos, así para carga puntual centrada su valor es de 1/2, para carga repartida uniformemente 1/4, para carga triangular mayor en los apoyos que en el centro el valor del parámetro disminuye a 1/6.
- $Q$  *carga total* aplicada a la estructura, incluido en el volumen estructural reducido como  $q \cdot A$ .
- $l$  *luz salvada*, parámetro que está incluido en el volumen estructural reducido.
- $\lambda$  *esbeltez*, es la relación entre la luz y el canto  $l / h$ .
- $L / l$  *proporción de la base*. Relación entre el lado largo y el lado corto en planta que, aunque no tiene una influencia notable en el coste, si lo tiene en la forma.

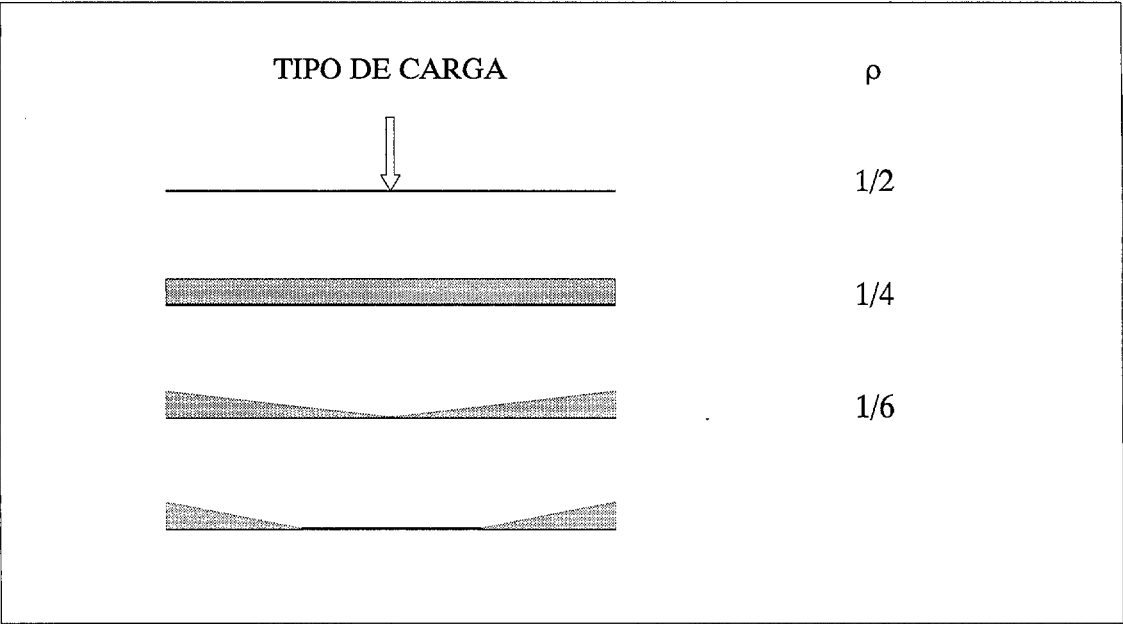


figura 6. 16: Parámetro de forma de la carga

Se ha visto la relevancia de estos parámetros en el análisis de formas unidireccionales, como las cerchas, aun cuando no se haya incluido en este trabajo. En tal caso permanecen constantes los parámetros de carga y luz, variando la esbeltez, no aparece la proporción de la base. En el proceso de obtención del óptimo se ve como las esbelteces aumentan, en general, con el fin de conseguir los valores óptimos.

En la búsqueda de estructuras laminares, tal y como está aquí planteada, no sólo varía la esbeltez, también lo hace el parámetro de carga, mientras, la carga total y la luz máxima alcanzada se mantienen durante el proceso.

Como se ha expuesto, todas las soluciones soportan la misma carga por unidad de superficie, por lo que diseños que corresponden a la misma base soportan idéntica carga total. Se ha hecho de esta manera para poder comparar configuraciones que den respuesta a problemas similares. Sin embargo se ha observado la tendencia a llevar mayor proporción de carga a los apoyos, es decir, el parámetro de carga toma valores bajos.

La luz salvada, dentro de cada tipo de problema, viene definido por la base, pero de nuevo, el recocado intenta saltarse esta condición de partida, como se ha expuesto en el apartado (6.2.6).

## 6.6 Resumen

De los análisis y comparaciones entre las soluciones se pueden extraer una serie de reglas que se repiten en todos los casos:

- los costes de las formas obtenidas corresponden bastante con las predicciones globales hechas a priori e incluso las mejoran.
- La disposición de los apoyos es tal que las relaciones entre el volumen estructural horizontal a tracción y compresión son iguales en todos los casos.
- La igualdad entre traslados de carga en horizontal y vertical es una característica de los diseños óptimos. Si la solución encontrada no posee esta característica, el diseño es mejorable mediante una transformación afín mediante el factor  $\kappa$ . Esta relación sirve también para verificar la cercanía de las soluciones al óptimo, y se ha comprobado que el termino medio  $\kappa$  es igual a 1.29, lo que indica una alta fiabilidad de las soluciones obtenidas.
- Aparecen dos configuraciones claras en cuanto a forma y comportamiento estructural relacionadas con el recinto que las contenga, para recinto completo aparecen sistemas arco-catenaria inclinados para reducir ampliamente el anillo a cota de apoyo, para recinto positivo aparecen arcos parabólicos y se eliminan los anillos intermedios.
- En general se aprecia que las soluciones de recinto completo son mejores a las de recinto positivo, algo lógico pues el problema planteado para recinto completo incluye las soluciones de recinto positivo,
- La seriación de las soluciones largas lleva a obtener unos coeficientes de trabajo en función del modo de apoyo, ya sea en el contorno o en dos lados opuestos, lo que hace que la estructura pueda trabajar en una o en dos direcciones.
- Aparece una clara tendencia a la concentración de tensiones derivada por el tipo de análisis y el dimensionado discreto de la estructura.

- Las superficies adquieren una alta rugosidad, gracias a los pliegues locales se consigue un aumento del canto local.
- Por regla general con la disminución de la longitud de las barras aumenta el volumen estructural y aumenta la esbeltez, aparece solo un par de excepciones. La tendencia indicada se mantiene en la configuración afín.
- Al aumentar el número de nudos de la configuración, aumenta el volumen estructural y disminuye la esbeltez.
- Las relaciones de esbeltez entre soluciones de recintos diferentes está en torno a un valor medio de 0.75 con una desviación estándar<sup>ix</sup> de 0.12 (solo se han considerado los valores antes de la transformación afín).
- Las relaciones de consumo entre soluciones de recintos diferentes está en torno a un valor medio de 0.79 con una desviación estándar de 0.11.
- Se encuentran otros parámetros que influyen en la configuración óptima que son el parámetro de carga, la carga total, la luz salvada, la esbeltez y la proporción de la base.

---

<sup>ix</sup> La desviación estándar se ha calculado mediante la fórmula:  $\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^2}$





## Capítulo 7

### Conclusiones

En esta tesis se ha propuesto la búsqueda de los parámetros de forma que definan las configuraciones óptimas en láminas; a lo largo de los capítulos anteriores se ha ido llevando a cabo este propósito.

Para ello, en el *capítulo 2* se han expuesto diversas maneras de conseguir formas estructurales. Se comenzó por las que aparecen en la naturaleza que, en ocasiones, son imitadas por el hombre en sus proyectos. También se ha presentado el uso de modelos físicos para realizar la búsqueda de formas en estructuras tipo lámina. Las ventajas son diversas, por una parte destaca el hecho de que permite visualizar el diseño arquitectónico en sus cualidades estéticas casi desde el primer momento, de esta forma el diseño se puede adaptar fácilmente a las condiciones espaciales (luz a salvar, altura, etc. ) como a las condiciones de contorno u otros requisitos. Las características del material elegido en la elaboración del modelo condicionan el proceso y la forma encontrada. También se ha de tener en cuenta que la técnica de membrana flexible solo es útil en el caso de una carga dominante.

Estos procedimientos requieren un posterior tratamiento de los datos obtenidos por medio de programas de CAD o de análisis de la estructura. Este paso se salvaba fácilmente por medio del uso de simulaciones informáticas en las que, además, se pueden introducir las características del material que se empleará para la construcción.

En el capítulo 3 se ha mostrado la expresión matemática del problema de la optimización de estructuras, cuestión de difícil resolución con los métodos más convencionales de optimización debido a la no derivabilidad de las funciones, además de

emplear un alto número de variables tanto discretas como continuas. Debido a esta complejidad se buscan procedimientos más adecuados para afrontar este problema, por ello se estudian los diferentes métodos de búsqueda de óptimos.

Ya se *conocía* el recocido simulado aplicado a diferentes problemas de optimación, incluidos los de estructuras, su aplicación a la optimación de cerchas es, quizás, lo más cercano al problema aquí planteado, aunque con el paso a tres dimensiones aparecen aspectos muy diferentes en cuanto a la topología o a la geometría.

Se ha presentado la Teoría de Diseño de Estructuras en el capítulo 4, pone el acento en la imagen geométrica del problema y de sus soluciones. Mediante esta Teoría se establece la *cantidad de estructura* y el *volumen estructural* como medidas del consumo de la estructura; este segundo será la función objetivo en el problema de la optimación de láminas. Del mismo modo, la Teoría indica como desglosar el volumen estructural y las características que poseen los diseños óptimos; de esta manera se utiliza para validar las soluciones obtenidas y con ello también todo el procedimiento.

Se plantea el problema de la búsqueda de óptimos en láminas en el capítulo 5, donde se exponen todas las consideraciones que se han hecho en aspectos como la aplicación de las cargas, el análisis y el dimensionado de las estructuras, estableciendo el dominio de búsqueda o los mecanismos de generación de alternativas.

Se aplica *el* recocido simulado a una serie de estructuras planteadas, se trata de casos muy similares con pequeñas variaciones entre ellos para poder apreciar la influencia de los diferentes parámetros. Manteniendo la *base* y *el* número de *nudos* se ha recocido variando la longitud máxima de las barras y se ha repetido el proceso para distintas bases y también para distinto número de nudos. Las soluciones en general son satisfactorias de acuerdo con la Teoría de Diseño de Estructuras: están dentro de la región óptima aunque sin alcanzarlo. Por tanto, se puede afirmar que el recocido simulado es un método de optimación adecuado para este problema.

Las formas, aunque correctas desde un punto de vista matemático, no son las *que* se esperaba encontrar o las que proyectaría un diseñador experto. Estas soluciones son útiles para obtener parámetros geométricos desde el punto de vista de la Teoría del Diseño de Estructuras y proporcionan una guía sobre la que reflexionar y extraer

conclusiones o abrir nuevos caminos. En el *capítulo* 6 se extraen los parámetros más significativos, para ello se comparan las soluciones con diferentes criterios, estudiando, entre otros aspectos, el cambio de recinto y el cambio en las proporciones de la base, estableciendo relaciones entre los valores encontrados.

### 7.1 Comportamiento del Recocido Simulado.

Ya en el capítulo 3 se estudiaba el comportamiento del recocido en relación con su aplicación a los problemas planteados en esta tesis, con el fin de mostrar empíricamente su convergencia. En esta ocasión, y después de observar todos los casos estudiados, se puede afirmar que el recocido simulado permite el estudio de la búsqueda de formas óptimas en láminas, tal y como se ha planteado, aunque no sea un problema de Maxwell (recordar el cambio de posición de las cargas y su valor).

En un problema tan complejo, en el que es difícil conseguir la estructura óptima, el recocido simulado se ha comportado esencialmente bien aportando soluciones aceptables. Al verificar las soluciones por medio de la Teoría del Diseño de Estructuras, se deduce que, aun sin alcanzar el óptimo, son muy cercanos a él y por tanto son buenos indicadores de la región óptima.

Las soluciones estudiadas no representan la solución particular de un problema particular, sino que representan el continuo de formas que existe detrás de cada una. Ese conjunto es el que se intenta explorar y que consiste en todas las soluciones mejores.

A partir de simplificaciones como la utilización de un dimensionado estricto, la no consideración del pandeo, etc, se consiguen capturar las propiedades de interés y la solución al problema real. es necesario una programación del mecanismo de generación de alternativas adecuada a cada problema en cuestión, sino que también hay que plantear unos mecanismos de chequeo que eviten al algoritmo la búsqueda en soluciones que soslayan el problema planteado. Esto implica acotar el dominio de búsqueda de una manera más precisa o la imposición de una serie de limitaciones. De esta manera se ha actuado tras ver que con la aparición de barras largas se llevan las cargas lo más cerca de los apoyos y desaparece la estructura, las limitaciones empleadas se han indicado en el apartado 5.3.

Es difícil a priori caracterizar qué limitaciones hay que imponer al procedimiento para evitar reducir excesivamente el dominio de búsqueda. Una cuestión observada en este sentido es que al limitar la longitud total de las barras se limita el canto total de la estructura, por ello se proponen otras maneras de llevar a cabo el mismo propósito limitando la proyección horizontal de la barra. La experiencia y la teoría del diseño de estructuras ayudan a observar las soluciones obtenidas y, de este modo, saber cuál es la línea a seguir.

## **7.2 Volumen estructural como función objetivo**

En esta tesis se presenta una visión parcial del problema de encontrar la forma óptima de estructuras tipo lámina. Al elegir el volumen estructural como medida del coste se dejan de lado otros aspectos energéticos o procesos constructivos complejos. La medida del coste empleada no representa todo, hoy en día debido al alto costo de la mano de obra en el primer mundo, en ocasiones puede primar este coste sobre el consumo del material. Sin embargo, el coste ligado al consumo del material se acerca bastante al problema a medio plazo de sostenibilidad de recursos.

La complejidad estructural de las soluciones se refiere a la configuración topológica y geométrica, no a la manera de soportar las cargas, es el caso de las estructuras formadas por familias de arcos y/o catenarias sobre los que apoya una segunda familia de arcos o catenarias cruzadas. Esto permite entrever la posibilidad de aplicar el procedimiento a la reflexión sobre las relaciones entre consumo en complejidad (coste o valor añadido de carácter más sostenible, por ser coste de reproducción en valores humanos, inteligencia, trabajo, etc...) y consumo material (coste o valor añadido menos sostenible por depender del empleo de recursos limitados por la capacidad de carga del planeta). Comparando, para ello, soluciones de complejidad limitada de forma variable.

## **7.3 Aplicaciones**

Las láminas se utilizan como estructuras de cubierta en edificios singulares, que debido a su uso, requieren grandes luces sin apoyos intermedios. Las láminas destacan por un comportamiento estructural íntimamente ligado a su forma.

Los parámetros encontrados pueden servir como aplicación directa a nuevos diseños de láminas, tanto reticuladas con elementos lineales (más apropiado para acero o madera) o superficiales (fundamentalmente de hormigón armado) aunque debido a la concentración de tensiones en ciertos diseños parece que no se obtendría una superficie de espesor constante.

Aplicación directa de las formas encontradas en su construcción real es una cuestión difícil, no se han incluido condiciones como el dimensionado según un catalogo de perfiles estándar o facilidad de puesta en obra; si se pueden aplicar los parámetros obtenidos como ayuda a la hora de proyectar la forma de la lámina.

En cuanto a los diseños de recinto completo y de recinto positivo, los primeros parecen más adecuados para materiales que soportasen bien la tracción, evidentemente los menos apropiados serían las fábricas u hormigones, mientras que los de recinto positivo son los más apropiados para los hormigones, debido a la mínima aparición de tracciones.

#### **7.4 Nuevas vías de investigación y futuros avances**

El procedimiento que aquí se muestra se podría perfeccionar. La ventaja frente a otros métodos expuestos radica en que pueden salvarse fácilmente los obstáculos depurando el programa o programando las rutinas correspondientes. Cada aportación puede abrir nuevas vías de investigación o un conjunto de nuevas formas.

El objetivo sería aportar respaldo o rechazo, experimental, a afirmaciones algebraicas sobre consumo en estructuras del tipo de las establecidas en la Teoría de Diseño de Estructuras, además de que la aparición de “sorpresas”, aporta luz sobre los aspectos de mayor relevancia en el comportamiento estructural, en este caso las parejas arco-catenaria que cruzan los recintos en las soluciones de recinto completo fueron una sorpresa importante, aun cuando pudiesen estar prefiguradas por las conocidas soluciones de diente de sierra, y responde a eliminar barras de esfuerzos relevantes en posiciones próximas a las de la línea neutra de la proyección en alzado.

Entre los aspectos detectados en esta tesis se proponen como nuevas vías de investigación posibles las siguientes:

Variando ciertas características como:

- El dimensionado continuo como una vía de exploración en otras familias de soluciones, como ya se indicaba en el apartado (6.2.4).
- La limitación de las longitudes de las barras de una manera más difusa como se indicaba en el apartado (6.3.1).
- Los tipos de bases experimentando con formas más complejas como por ejemplo en forma de cruz, con apoyos intermedios con estructuras en voladizo, etc.

Incluyendo cuestiones como:

- El empleo de características de materiales como el hormigón o la fabrica sin resistencia a tracción, etc.
- el empleo de diferentes condiciones de carga, incluyendo las posibles alternancias,
- la inestabilidad a pandeo de las barras comprimidas,
- el peso propio de las barras como ya se indicó en el apartado (6.3.1) del capítulo anterior,
- introducir consideraciones en el costo relacionados con el proceso constructivo, complejidad de los nudos diferentes, etc.,
- estudiar la aparición de los pliegues en la superficie, como se indicó en el apartado (6.2.5), su ritmo, la dirección de los pliegues que en caso de base circular tienen una clara disposición radial y estudiar los parámetros que puedan influir en su aparición, a simple vista parece que con mayor número de nudos y barras se facilita su aparición y quizás el horario de temperaturas del recocido pueda también influir

# Anejo A

## Símbolos más frecuentes

A continuación se relacionan los símbolos utilizados en el texto ordenados alfabéticamente.

### A.1 Símbolos romanos.

$A$	área de una sección.
$b$	bielas de sustentación.
$C$	parámetro del recocido que indica el número de ciclos.
$c$	parámetro de control (temperatura) para medir la probabilidad de escoger una solución
$Cr$	coeficiente de trabajo en una direcciones, o de apoyo en lados opuestos.
$Cc$	coeficiente de trabajo en dos direcciones, o de apoyo en contorno.
$e$	número de elementos, número de barras.
$f$	tensión de trabajo.
$\underline{F}(\underline{x})$	vector de funciones objetivo, $\underline{F}(\underline{x}) = [f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_K(\underline{x})]$
$f(\underline{x})$	función objetivo comúnmente denominada $f$ .
$f(\underline{x}_0)$	óptimo de la función objetivo.
$G$	conjunto de todas las geometrías posibles.
$g$	geometría de la solución.
$g_j(\underline{x})$	restricciones de diseño, comúnmente llamado $g$ .



$I$	intensidad de un generador.
$L$	luz larga salvada.
$l$	luz corta salvada.
$L_e$	longitud de un elemento $e$ .
$l_{max}$	longitud máxima de las barras
$M$	número de transiciones.
$N$	solicitud axil.
$n$	número de nudos.
$N_e$	solicitud axil de un elemento $e$ .
$n_f$	número de nudos fijos.
$N^+$	solicitud axil de las barras traccionadas.
$N^-$	solicitud axil de las barras comprimidas.
$q$	carga puntual en un nodo.
$q$	carga por unidad de superficie.
$r$	número de repeticiones de la solución.
$R\{C, \alpha, \beta, \tau_0, \theta\}$	parámetros del recocido.
$t$	topología de la solución.
$T$	conjunto de todas las topologías posibles.
$u$	deformación de la estructura.
$\underline{u}$	vector cualquiera.
$u_M$	deformación máxima admisible.
$V$	volumen de material.
$v$	conjunto de vínculos.
$V_s$	volumen de estructura.
$V^+$	cantidad de estructura correspondiente al trabajo en tracción.
$V^-$	cantidad de estructura correspondiente al trabajo en compresión.

$V^=$	cantidad de estructura correspondiente a traslados de carga en horizontal.
$V^{\parallel}$	cantidad de estructura correspondiente a traslados de carga en vertical.
$W$	cantidad de estructura.
$W^+$	cantidad de estructura correspondiente al trabajo en tracción.
$W^-$	cantidad de estructura correspondiente al trabajo en compresión.
$W^=$	cantidad de estructura correspondiente a traslados de carga en horizontal.
$W^{\parallel}$	cantidad de estructura correspondiente a traslados de carga en vertical.
$X$	dominio del problema, campo de soluciones válidas.
$\underline{x}$	conjunto finito de variables del problema, $\underline{x}=(x_1,...,x_n)$ .
$\underline{x}_0$	valores de las variables para las cuales $f(\underline{x}_0)$ es óptima.
$\underline{x}_i$	configuración actual.
$\underline{x}_j$	configuración alternativa.
$x_m, x_M$	límites inferior y superior de variación de las variables.

## A.2 Símbolos griegos.

$\alpha$	(alfa) factor para hallar el número de transiciones por ciclo, (parámetro del recocido).
$\beta$	(beta) exponente para calcular el número de configuraciones exploradas, (parámetro del recocido).
$\gamma$	(gamma) factor para hallar número de transiciones antes de tomar la primera muestra, (parámetro del recocido).
$\delta$	(delta) factor para hallar número de transiciones antes de tomar una muestra, (parámetro del recocido).
$\theta$	(theta) factor de evolución de la temperatura, (parámetro del recocido).
$\kappa$	(kappa) factor de proporción entre esbelteces.
$\lambda$	(lambda) esbeltez.

$\rho$	(rho) peso específico del material.
$\sigma_s$	(sigma) tensión derivada de la sollicitación.
$\sigma_{adm}$	tensión admisible con seguridad.
$\sigma_r$	tensión resistida por la configuración estructural.
$\tau_0$	(tau) factor de referencia, también denominado, Fr, y anteriormente <i>c</i> y temperatura, (parámetro del recocido).
$\varphi$	(phi) ángulo que forma la traza del plano con el eje X.
$\omega$	(omega) volumen estructural reducido, adimensional.

## **Anejo B**

### **Contenido del CD**

Para completar la documentación se adjunta un CD, el propósito principal es no llenar páginas con listados de programación, algo que no parece apropiado para una tesis dedicada a la búsqueda del consumo mínimo de material, además de incluir las imágenes en tres dimensiones de todas las soluciones obtenidas para así facilitar su entendimiento.

A continuación se expone el contenido según los diferentes directorios en los que se ha organizado la información.

#### **B.1 Organización en directorios**

El CD está organizado en dos directorios principales **MS-DOS**, que contiene el ejecutable preparado para este sistema operativo y para el entorno de Microsoft.

El directorio **LINUX** contiene así mismo el ejecutable de este sistema operativo que ha sido compilado tanto para **Debian** como para **Suse**, de ahí los dos subdirectorios.

Por último el directorio **SOLUCIONES** contiene los ficheros que contienen las soluciones encontradas y que pueden ser abiertos con **AutoCAD**.

#### **B.2 MS-DOS**

El ejecutable se denomina **oplam.exe**, se ha compilado con la versión 6.00 del compilador **Microsoft-C** y se ha probado su correcto funcionamiento en los siguientes sistemas operativos: **Windows 98**, **Me**, **2000**, **NT** y **XP**, mediante la línea de comandos.

Aunque el código fuente es el mismo que el compilado en Linux, debido a la distribución de la memoria de MS-DOS, la utilización de este programa está limitada en número de nudos, por lo que no se puede emplear a estructuras grandes. Esta cantidad es variable en función del número de barras, o si los nudos son de contorno, apoyados o interiores. Los ejemplos que se muestran en esta tesis de hasta 40 nudos se han obtenido con este programa.

### B.3 LINUX

Hay dos subdirectorios con dos ejecutables correspondientes con Debian Linux y con Suse Linux 9.0, el código fuente es idéntico en ambas versiones pero las librerías de cada compilador al ser diferentes provoca que un mismo ejecutable no funcione en ambos sistemas. El ejecutable se denomina oplam, se ha compilado con el compilador de C de GNU, publicado por la Free Software Foundation. Los autores y colaboradores se pueden consultar en <http://gcc.gnu.org/onlinedocs/gcc/contributors.html>, se ha probado su correcto funcionamiento en ambos sistemas operativos.

En esta ocasión no hay limitación de número de nudos y barras salvo la propia del ordenador donde se ejecute.

### B.4 SOLUCIONES

Los ficheros se organizan de la misma manera que el capítulo 5, en función del tipo de base y de las longitudes de barra. De esta manera la organización y los ficheros son los siguientes:

#### 01-Circular

n026-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base circular de 26 nudos
n026-L80-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=80\%$
n026-L80-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=80\%$
n026-L40-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=40\%$
n026-L40-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=40\%$

n101-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base circular con 101 nudos
n101-L30-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=30\%$
n101-L30-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=30\%$

#### 02-Cuadrada

f25-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base cuadrada de 25 nudos
f25-L80-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=80\%$
f25-L80-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=80\%$
f25-L40-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=40\%$
f25-L40-Rc-a.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=40\%$ con apoyos redundantes.
f25-L40-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=40\%$
f86-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base cuadrada de 86 nudos
f86-L30-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=30\%$
f86-L30-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=30\%$

#### 03-Isler

h112-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base cuadrada con 112 nudos y apoyos puntuales en las cuatro esquinas, lámina de Isler para la piscina cubierta de Brugg.
h112-L30-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=30\%$

#### 04-Mixta

L39-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base mixta de 39 nudos
------------	---------------------------------------------------------------

L39-L160%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=160\%$
L39-L160%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=160\%$
L39-L80%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=80\%$
L39-L80%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=80\%$
L54-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base mixta de 54 nudos
L39-L40%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=40\%$
L39-L40%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=40\%$
05-Rectangular 2-1	
R46-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base rectangular de proporción 2/1 con 46 nudos
R46-L80%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=80\%$
R46-L80%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=80\%$
R46-L40%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=40\%$
R46-L40%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=40\%$
06- Rectangular 3-1	
R67-00.dwg	configuración inicial para ejemplos de base rectangular de proporción 3/1 con 67 nudos
R67-L80%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=80\%$
R67-L80%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=80\%$
R67-L40%-Rc.dwg	solución para recinto completo y $l_{max}=40\%$
R67-L40%-Rp.dwg	solución para recinto positivo y $l_{max}=40\%$

## **Anejo C**

### **Manuales de referencia**

A continuación se muestra cómo manejar el programa elaborado para esta tesis. El fichero ejecutable se incluyen en el CD anejo como parte de la tesis para diferentes sistemas operativos.

El programa se ha elaborado a partir del código fuente del optimizador de cerchas isostáticas de Vázquez (Vázquez, 1994). El lenguaje de programación empleado ha sido el C, en la bibliografía adjunta se pueden encontrar libros y manuales de gran utilidad. Se ha compilado tanto para LINUX como para MS-DOS. Las instrucciones que se dan a continuación sirven para ambos sistemas.

#### **C.1 Optimizador de láminas**

Se observará que la entrada al programa está preparada para una posible futura ampliación del mismo por lo que hay datos de entrada que, aunque en este momento no parecen necesarios para el objetivo del programa, son necesarios para que funcione correctamente. Estos casos se irán comentando en el momento en que surjan.

La entrada y salida de datos en el programa se puede realizar mediante la línea de comandos o bien mediante un fichero que contenga la información. Se puede obtener una pequeña ayuda inicial escribiendo en la línea de comandos la instrucción `oplam -h`. Se indicará, mediante un ejemplo, como se puede comenzar a utilizar el programa, además se añade una breve guía de los ficheros de salida del mismo. Así lo que aparecerá en pantalla será lo siguiente:



OPLAM, Belén Orta Rial, 2004,

Usage: OPLAM [-options]

Examples: OPLAM -f in1 -o in1

<Options:>

```
-a      integer      semilla para el generador aleatorio
-b      comprobaciones no muy estrictas
-f      name         lea en el fichero name en vez de en stdin
-h      Just, it`s that
-o      name         genere ficheros name.* en vez de OPLAM.*
```

Además de stdout se producen los siguientes ficheros

```
OPLAM.out  datos de terminación (puede usarse como OPLAM.in)
OPLAM.si   script para AutoCAD de la solución inicial
OPLAM.s     script para AutoCAD de la solución final
OPLAM.sb    script para AutoCAD de la solución mejor
OPLAM.sia   fichero para ansys de la solución inicial
OPLAM.sa    fichero para ansys de la solución final
OPLAM.sba   fichero para ansys de la solución mejor
```

Los archivos de dibujo para el programa AutoCAD, *scripts* o guiones, contienen instrucciones reconocidas por el citado programa que generan el dibujo de las soluciones, pueden ser leídos mediante la instrucción `script` o ser insertados en un dibujo al ser arrastrados sobre la ventana del programa. Para ello ha de cambiarse la extensión a `*.scr`. El dibujo generado consta de las siguientes capas que deben estar previamente definidas en el dibujo en el que se inserta el guión, estas son **BARRAS** donde aparecen las barras dibujadas en tres dimensiones con líneas sin grosor, en la capa **SUPERFICIES** aparecen dibujadas las superficies que generan esas barras, a éstas se les puede asociar un material y posteriormente renderizar para obtener las imágenes en tres dimensiones que se ha ido mostrando a lo largo del capítulo 5º (en el CD adjunto se aportan los ficheros de todos los ejemplos estudiados únicamente con la capa de superficies). Por último la capa **FUNCIONAL** que contiene el texto con el valor de la función objetivo, la temperatura a la que ha parado y el valor medio de la función objetivo en todo el proceso.

A continuación se va a utilizar un fichero de entrada a modo de ejemplo y así ver las posibilidades de entrada de datos, para ello se ha elegido uno de los casos de

estructura de base cuadrada con 25 nudos. Se verá cada uno de los apartados individualmente explicando el significado.

Las primeras líneas son comentarios que sirven para definir el contenido del fichero y el tipo de problema a estudiar. Éstos se pueden repetir a lo largo del fichero cuantas veces se desee, el símbolo de la almohadilla, #, indica el comienzo del comentario y el final de línea indica su terminación. Se verá como resulta práctico acompañar cada apartado con un breve comentario que indique su significado o como interpreta el programa los datos ahí contenidos.

Una de las primeras cosas que se puede observar es que se han eliminado los acentos, eso es indispensable en las palabras clave y en los comentarios facilita la transportabilidad entre sistemas operativos diferentes.

```
# Stansted Airport, at London, England, UK, 1991 by Norman Foster  
# Simplificación a 25 nudos
```

El fichero de entrada ha de tener un orden general que comienza por los datos del problema, irán detrás de esta palabra. A continuación los datos de la solución, y finaliza con otros datos, el orden de los datos dentro de cada apartado no es importante pues el programa leerá cualquiera que se le de, aunque no se han probado con todas las posibilidades pues en general la tendencia es la de seguir un orden concreto que es el que se da a continuación.

En el apartado de datos del problema se incluyen aquellos datos que permanecen invariables durante todo el proceso. Consta de varios grupos de información, geometría, vínculos, cargas, recinto y otros datos, separados entre ellos por un punto y coma. Se verá que en general los datos de cada grupo de información van entre corchetes en caso de ser una lista de números, mientras que, de tratarse de un único número real, entero o natural los corchetes no aparecen.

La geometría consiste en una lista de datos con las coordenadas en tres dimensiones, (x,y,z), separadas por comas, números reales, cada trío es la coordenada e un punto, la numeración de los mismos se asigna automáticamente comenzando con el

nudo 0. Aquí se incluyen los nudos fijos y los nudos apoyados que no cambiarán de posición durante el proceso.

```
problema:
# coordenadas de nudos en metros
geometria = {
    0.0, 0.0, 100.0,
    33.33, 0.05, 100.0,
    66.67, 0.0, 100.0,
    100.0, 0.0, 100.0,
    99.95, 33.28, 100.0,
    100.0, 66.61, 100.0,
    100.0, 100.0, 100.0,
    66.67, 99.95, 100.0,
    33.33, 100.0, 100.0,
    0.0, 100.0, 100.0,
    0.05, 66.67, 100.0,
    0.0, 33.33, 100.0
};
```

En el siguiente grupo de información aparecen los vinculos, consiste en una serie de parejas de números que representan el número de nudo, número natural, y a continuación la restricción de desplazamiento (0 para el eje  $x$ , 1 para el eje  $y$ , 2 para el eje  $z$ ), este criterio se aplicará en todos los apartados.

```
# vinculos={ nudo, eje }
vinculos = {
    0, 0,
    0, 2,
    1, 2,
    2, 2,
    3, 1,
    3, 2,
    4, 2,
    5, 2,
    6, 0,
    6, 2,
    7, 2,
    8, 2,
    9, 1,
    9, 2,
    10, 2,
    11, 2
};
```

La carga que se introduce representan una carga superficial uniforme, es necesario dar el eje de aplicación de la carga y su valor, en principio el programa estaba preparado para leer cargas en todas las direcciones, según los ejes coordenados, pero debido a que los ejemplos desarrollados siempre se ha aplicado carga vertical, se ha optado por reducir la memoria empleada eliminando la posibilidad de introducir cargas en todos los ejes salvo el z.

```
#cargas = { eje ,intensidad carga kN/m2 }
#pp                               = 2.5kN/m2
#acabados          100kp/m2 = 1.0kN/m2
#uso                100kp/m2 = 1.0kN/m2
#total              100kp/m2 = 4.5kN/m2
cargas = {
    2, -4.5
};
```

El recinto, en el que se pueden mover los nudos de la estructura, se da por medio de las coordenadas de dos puntos que definen un prisma en el que debe estar la estructura inicial para evitar avisos de error.

```
recinto ={
    0, 0, 0,
    100, 100, 200
};
```

Para terminar con los datos a aportar para el problema se pueden introducir los siguientes datos, el número mínimo de nodos, m, el número máximo de nudos, N, si no se define alguno de los dos o ambos de adoptaría como valor por defecto en número de nodos fijos para m y el numero de nodos de esta solución para N. El número de nudos apoyados, na representa el número máximo de nudos de contorno apoyado, nc es el número de nudos de contorno libre, lmax es la longitud máxima que puede alcanzar una barra durante el recocido, como se explicó anteriormente, es para evitar que el programa se escape del problema a resolver. La tensión de trabajo del material empleado, f, como se ha comentado en el capítulo 5 corresponde con el acero A-42 según la norma NBE-EA-95, y por último el módulo de elasticidad del mismo, E.

```

m = 25;      # mínimo numero de nudos
N = 25;      # máximo numero de nudos
na = 8;      # máximo numero de nudos apoyados
nc = 0;      # numero de nudos contorno libre
lmax = 80;   # longitud máxima de barras
f = 26;      # Safe tension is 26 kN/cm2, steel A-42.
E = 21000;   # Steel Young's modulus 21000kN/cm2

```

El siguiente apartado consta de todos los datos de la solución concreta y por lo tanto varían durante todo el proceso. Al igual que antes son necesarios los datos de geometría de los nudos variables, pero en esta ocasión está subdividida la información en varios apartados en función del tipo de nudo, todos ellos consisten en listas de números reales donde cada trío representa las coordenadas de un nudo separados por comas. Los de contorno apoyados son aquellos puntos de contorno con, únicamente, reacción vertical, al estar en este apartado su posición sería variable, y mediante algoritmo correspondiente podría cambiarse su posición, aunque de momento no está en funcionamiento. La característica de los nudos de contorno libre es que son nudos de contorno sin apoyos de ningún tipo y solo varían su posición dentro de un plano definido por su propias coordenadas y el ángulo que forma la traza de este plano con el eje X. Por último los nudos interiores son lo que su nombre indica y no está apoyados nunca. La numeración de todos los nudos se hace automáticamente continuando con el último asignado en el apartado anterior.

```

solucion:
# puntos de contorno apoyado
apoyo = {
};
# puntos de contorno libre
contorno = {
};
angulo = {
};
# puntos interiores
interior = {
    16.67, 16.61, 106.22,
    50.55, 16.67, 106.22,
    83.33, 16.61, 106.22,
    33.33, 33.33, 109.90,
    66.67, 33.33, 109.90,
    16.72, 50.0, 106.22,

```

```

50.0, 50.06, 111.11,
83.28, 50.0, 106.22,
33.33, 66.67, 109.90,
66.67, 66.67, 109.90,
16.67, 83.39, 106.22,
49.44, 83.33, 106.22,
83.33, 83.28, 106.22

```

```
};
```

El ejemplo elegido no tiene nudos de contorno libre, pero de tenerlos, cada uno ha de tener asociado un valor de ángulo en radianes, por o tanto, en este apartado, aparecerán una lista de números reales positivos, tantos como número de nudos de contorno. Los ángulos tomarán valores positivos y menores a  $\pi$  expresado en radianes,  $\varphi \in [0, \pi)$ . Los valores negativos para ángulos indican que el nudo en cuestión solo se puede mover a lo largo del eje que corresponda, así  $\varphi = -2$  indicará que se desea limitar el movimiento ambos ejes X e Y, y permitir únicamente el movimiento en vertical a lo largo del eje Z.

El **esquema** indica cómo están unidos los nudos mediante barras, cada trío de números naturales indica el nudo inicial y final unidos mediante una barra.

```

esquema = {
    0, 1,
    1, 2,
    2, 3,
    12, 13,
    13, 14,
    15, 16,
    20, 21,
    22, 23,
    23, 24,
    9, 8,
    8, 7,
    7, 6,
    11, 0,
    10, 11,
    9, 10,
    12, 17,
    17, 22,
    15, 20,
    16, 21,
    14, 19,
    19, 24,

```

3, 4,  
 4, 5,  
 5, 6,  
 2, 14,  
 14, 4,  
 1, 13,  
 13, 16,  
 16, 19,  
 19, 5,  
 0, 12,  
 12, 15,  
 15, 18,  
 18, 21,  
 21, 24,  
 24, 6,  
 11, 17,  
 17, 20,  
 20, 23,  
 23, 7,  
 10, 22,  
 22, 8,  
 11, 12,  
 12, 1,  
 10, 17,  
 17, 15,  
 15, 13,  
 13, 2,  
 9, 22,  
 22, 20,  
 20, 18,  
 18, 16,  
 16, 14,  
 14, 3,  
 8, 23,  
 23, 21,  
 21, 19,  
 19, 4,  
 7, 24,  
 24, 5

};

Por último el apartado de otros datos donde se apuntan los valores relativos al recocido, así se indican el número de ciclos máximo, los valores de los parámetros alfa, beta, gamma, delta y theta. El valor inicial de la temperatura que puede darse como un valor concreto de la misma o como un valor relativo al de la función

objetivo en la solución de entrada,  $Fr/Fi$ . Si no se introduce alguno de estos valores se tomaría lo que tiene el programa por defecto.

```
# recocido valores por defecto menos los que se indican
ciclos = 50;
alfa = 50;
beta = 1;
gamma = 1;
delta = 1;
Fr/Fi = 100;
theta = 0.9;
```

El generador de alternativas utiliza dos algoritmos que producen cambios en la estructura estudiada, son los indicados en el capítulo 5. Se indica mediante parejas de números dónde el primero de ellos indica el algoritmo de cambio correspondiente, el significado de cada uno se indica mediante un comentario en el fichero de entrada al lado de cada uno y el segundo dígito indica la intensidad (ver cap 5). Aunque se ha iniciado la programación de otros algoritmos de generación de alternativas, aun no están depurados por ello no se han incluido en esta tesis.

```
generador = {
    0, -2, #cambia nudo, geometría
    5, -2, #cambia barra, topología
};
```

Los siguientes valores enteros indican el oráculo, correspondiendo 0 a Metrópolis y 1 a un oráculo continuo no empleado en los ejemplos de esta tesis  $ilg$ , valor real valores reales entre 0 y 1, representa el índice empleado para determinar la posición de los nudos existentes cuando se cambie su posición relativo a la amplitud total del recinto. La opción `intersecciones` activa, 1, indica que las barras solo pueden cortarse en nudos, es decir no se cortan en cualquier otro punto, mientras que desactivada, 0, permite el cruce de barras. En realidad todos los ejemplos aquí mostrados han tenido esta opción activa siempre.

```
oraculo = 0;
ilg = 0.5;
intersecciones = 1;
```



Por último el valor de **recocido** activo, 1, hace que el programa inicie la búsqueda del óptimo es decir, recuece, mientras que con 0 únicamente verifica el archivo o datos de entrada y crea archivos de salida correspondientes. En el fichero de salida generado por el programa aparece un comentario con el valor del coste, o volumen estructural de la solución final acompañando a los datos de la solución final.

```
recocido = 0;
# Objective function is Vs=NL = 21996454.1 kN.m
```

## C.2 Valores por defecto.

```
lmax = 80; # longitud maxima de barras
f = 26;    # Safe tension is 26 kN/cm2, steel A-42.
E = 21000; # Steel Young's modulus 21000kN/cm2

# recocido
ciclos = 400;
alfa = 100;
beta = 1;
gamma = 2;
delta = 1;
Fr/Fi = 100;
theta = 0.9;
generador = {
    0, -2, #cambia nudo, geometria
    5, -2, #cambia barra, topologia
};
oraculo = 0;
ilg = 0.5;
ile = 0.5;
superfluos = 1;
intersecciones = 1;
recocido = 1;
```

## Referencias bibliográficas

En este apartado se recogen las referencias que, por una parte me han servido para entender el tema y poder así organizar este texto, y por otra las que se citan a lo largo del mismo, evitando así el tener que recurrir buscar en dos listados.

Aarts, Emile et Korst, Jan.

- 1989        *Simulated annealing and Boltzman machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing*. Great Britain: Courier International, Tiotree, Essex.

Adams, D.; Watson, L.; Gürdal, Z. et Anderson-Cook, C.

- 2004        "Genetic algorithm optimisation and blending of composite laminates by locally reducing laminate thickness". *Advances in Engineering Software*. vol. 35. 2004, p. 35-43.

Adeli, Hojjat et Kamal, Osama

- 1991        "Efficient optimization of plane trusses" *Adv. Eng. Software*, 1991, Vol. 13, No. 3, pp. 116-122

Adeli, Hojjat; Kumar, Sanjay

- 1995        "Distributed genetic algorithm for structural optimization" *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 8, n. 3, Jul 1995, p.156-163.

Ambur, Damodar; Jaunky, Navin

- 2001        "Optimal design of grid-stiffened and shells with variable curvature" *Composite Structures*, n. 52, p.173-180.

Andrés, O. A.

- 1994 "An Extension of Gaudi's Funicular Technique to the conception and Generation of Structural Surfaces", *Bulletin of the IASS*. vol. 35 n. 116. p. 161-172.

Ansola, R.; Canales, J.; Tárrago, J. A.; Rasmussen, J.

- 2002a "An integrated approach for shape and topology optimisation of shell structures". *Computers and Structures* vol. 80 p. 449-458.
- 2002b "Optimización conjunta de forma y distribución de rigidizadores para su aplicación en estructuras laminares". *Métodos Numéricos en Ingeniería V España*, 2002, 20p.

Atiqullah M. M.; Rao S. S.

- 1995 "Parallel processing in optimal structural design using simulated annealing" *AIAA journal*, 1995, 33 (12) p.2386-2392.

Awrejcewicz, J.; Krysko, V.A.

- 2003 "Some problems of analysis and optimisation of plates and shells". *Journal of Sound and Vibration*, 264 (2003) p. 343-376.

Baltz, M.

- 1991 "Concrete Shells in the Constructive System of Isler" "Architecture aspect of organic forms and design of concrete shells" *Bulletin of the IASS* vol 32 no. 2. (copia facilitada por Valentín Quitas).

Banichuk, N. V.

- 1990 *Introduction to optimisation of structures*. Moscow. (Se cita la versión en ingles traducida por Vadim Komkov, New York: Springer-Verlag.

Bayón, Mariano

- 1972 "Hacia una tecnología integral" *Arquitectura* No. 162-163 julio-agosto 1972 pp. 43-46

Bennage, W. A. et Dhingra A. K.

- 1995 "Single and Multiobjective Structural Optimization in discrete-Continuous Variables Using Simulated Annealing" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, 2753-2773

Best, G. C.

- 1964 "Completely Automatic Weight-Minimization Method for High-Speed Digital Computers" *J. Aircraft*, Vol. 1, No. 3, May-June 1964, pp. 129-133

Bland, Robert G.

- 1981 "The Allocation of Resources by Linear Programming" *Scientific American*, vol. 244:108-119 ( versión castellana en *Investigación y Ciencia* n. 59, pp. 62-75 )

Bletzinger K.-U. et alli: Maute, K.; et Ramm, E.

- 1996 "Structural Concepts by Optimization", *IASS-Symposium Stuttgart*, October, 1996. (Copia facilitada por E. Ramm).

Bletzinger K.-U.

- 1998 *Form Finding and Optimization of Membranes and Minimal Surfaces*. Lecture notes, prepared for the Ph. D. course Advanced Topics In Structural Optimization. Technical University of Denmark.

Bonnans, J. F.; Gilbert, J. C.; Lemaréchal, C. et Sagastizábal, C. A.

- 2003 *Numerical optimisation: theoretical and practical aspects*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003 (versión traducida al ingles del original en francés *Optimisation Numérique*, publicada por Springer-Verlag Berlín Heidelberg en 1997.)

Brebbia, Carlos Alberto et Hernández, Santiago (ed)

- 1989 *Computer Aided Optimum Design of Structures: Recent Advances*. Proceedings of the first International Conference, Southampton, UK, June 1989 Computational Mechanics Publications, Southampton, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- 1989a *Optimization in Structures: Applications. Proceedings of the first International Conference*, Southampton, UK, June 1989 Computational Mechanics Publications, Southampton, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Budiman, J. & Rajan, S. D.

- 1993 "Shape Optimal Design Methodology - The Hybrid Natural Approach" *Proceedings of 34th AIAA/ASCE/ASME/AHDS SDM Conf. ASCEE* New York, pp. 544-554.

Camprubi, N.; Bischoff, M. et Bletzinger, K.-U.

- 2002 "Shape optimization of shell and structures". Poster *Statusseminar 2002*, Neue Mathematische Verfahren on Industrie und Dienstleistungen. Technische Universität München.

Casals Balagué, A. et González Moreno-Navarro, J. L.

- 1990 "Gaudí y el misterio de la encarnación ( Las incógnitas de la cripta de la Colonia Güell". *Informes de la construcción*, Vol. 42, nº. 408 julio-agosto, 1990, pp. 63-76.

Cervera Bravo, Jaime.

- 1989 "Tres teoremas fundamentales de la teoría del diseño de estructuras." *Informes de la Construcción*, Vol. 40, No. 399, enero/febrero, pp. 57-66
- 1990 *Métodos de Minimización aplicados al Diseño de Cúpulas*. Trabajo de investigación aportado al concurso de plaza de catedrático. Departamento de Estructuras de Edificación. Madrid.
- 1990a "Las estructuras y el peso propio." *Informes de la Construcción*, Vol. 42, No. 407, mayo/junio, 1990, pp. 73-85.
- 1993 *Diseño de estructuras de edificación*. Madrid: Instituto Juan de Herrera & Departamento de Estructuras de Edificación (ETSAM).
- 1996 "Técnica de la utopía. Centenario de Richard Buckminster Fuller." *Arquitectura Viva*, No. 46, enero-febrero 1996, pp. 72-73.
- 2004 *Concebir y analizar estructuras*. Madrid 2004. Ejemplar facilitado por el autor.

Chilton, John

- 2000 *Heinz Isler. The Engineer's Contribution to Contemporary Architecture*, London: Thomas Telford Publishing.

Choi, Brian; Park, Young H.; Choi, Kyung K.

- 2000 "Shape design optimisation of joining mechanism using doubly curved shell". *Computers and Structures*, vol. 77 p. 495-507.

Cui, C.; Ohmori, H. et Sasaki, M.

- 2003 "Computational Morphogenesis of 3D Structures by Extended ESO Method", *Journal of The International Association for Shell and Spatial Structures*. Vol. 44 n. 1, 2003. pp:51-61.

Daoud, F; Camprubi, N.; Bletzinger, K.-U.

- 2004 "Filtering and regularization techniques in shape optimization with CAD-free parametrization". *Multi-physics and Multi-scale Computer Models in Non-linear Analysis and Optimal Design of Engineering Structures Under Extreme Conditions*. NATO, 2004.

Davis, Lawrence (ed.)

- 1987 *Genetic Algorithms and Simulated Annealing* London: Pitman. Los Altos (CA): Morgan Kaufman (copia facilitada por Vázquez).

Denning, Peter J. et Brown, Robert L.

- 1984 "Sistemas operativos" *Investigación y Ciencia*, n. 98, noviembre, pp. 58-66.

Eco, Umberto.

- 1977 *Como se hace una tesis*. Barcelona: Gedisa, 1983, (versión castellana de: Come si fa una tesi di laurea.s.c.: Tascabili Bompiani).

Eekhout, Mick

- 1972 "Frei Otto and the Munich Olympic Games, form the measuring experimental models to the computer determination of the pattern", *Zodiac* n. 21 1972 pp. 12-72.

Elgaaly, M.

- 2000 "Post-buckling behaviour of thin steel plates using computational models". *Advances in Engineering*, vol. 31, 511-517.

Farkas, Jozsef.

- 1984 *Optimum design of metal structures*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.

Goldgerg, David E.

- 1989 *Genetic Algorithms in Search. optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts.

Gordon, J. E.

- 1978 *Estructuras o por qué las cosas no se caen*. Celeste ediciones, Madrid, 1999. (traducción al castellano por V. Quintas de *Structures or Why Things don't fall down*, Pelican Books, 1978 )

Hajek, Bruce.

- 1988 "Cooling Schedules for Optimal Annealing". *Mathematics of Operations Research*, vol. 13, n. 2, May 1988. pp. 311-329.

Hasançebi, O.; Erbatur, F.

- 2002 "Layout optimisation of trusses using simulated annealing". *Advances in Engineering*, vol. 33, pp.681-696.

Hernández Ibáñez, Santiago.

1990 *Métodos de diseño óptimo de estructuras*. COICCyP. Madrid.

Hernández, S.; Fontán, A.N. .

2002 *Practical Applications of Design Optimization*. United Kingdom, WIT Press.

Holland, John H.

1975 *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*, The University of Michigan (consultada la edición de 1993, Cambridge, Massachusetts: MIT Press).

1992 "Algoritmos genéticos" *Investigación y Ciencia*, no. 192, p.38-45.

Holly, John H.

1975 *Adaptation in Natural y Artificial Systems: An introductory Analysis con Applications to Biology, Control, y Artificial Inteligence*, The University de Michigan (consultada la edición de 1993, Cambridge, Massachusetts: MIT Press).

Hooker, John

2000 *Logic-Based Methods for Optimization. Combinig Optimization and Costraint Satisfaction*, Wiley-Isterscience, USA.

Hsiao-Hui Lee et Liang-Jenq Leu

2003 "Consistent formulations for geometric nonlinear analysis of space framed structures", *Journal of The International Association for Shell and Spatial Structures*. Vol. 44 n. 3, 2003. pp:175-180.

Isler, Heinz

1965 "Tecnick und Typologie der Buckelschalen", *Bauen + Wohnen*, n.10 pp. 384-388. (Traducción inglesa en la misma revista: Technique and typology of concave shell constructions).

1979 "New shapes for shells-Twenty Years After", World Congress on Shell Structures, 20th anniversary of IASS, Madrid, *Bulletin of IASS*, vol. 71/72.

1985 "Aspects of Constructional physics". *Bulletin of the IASS*. vol. 26-1 abril 1985 n. 87 pp. 35-37.

1986 "Concrete shells and Architecture". *Bulletin of the IASS*. vol. 27-2 agosto 1986 n. 91 pp. 39-42.

1991 "The Quality of Shell Design and Construction",. International Symposium Dresden, September 1990, *Bulletin of IASS*, vol. 32 no. 2. pp. 67-71. (copia facilitada por Valentín Quintas).

- 1993 "Generating Shell Shapes by Physical Experiments", IASS. Symposium in Copenhagen, DK, Sept. 1991. *IASS Bulletin* vol. 34, (111), no. 1.
- 1995 "Evolution of shell structures", International Symposium Milan, 1995, *Bulletin of IASS*, vol. 1 pp. 271-292. (copia facilitada por Valentín Quintas).
- 1997a "Experience with Non-Geometric Shells". *Proceedings of the IASS International Symposium on Shells and Spatial Structures*, Singapore, 1997. Ed.: S.P. Chiew-Nanyang, Technological University Singapore
- 1997b "Transparent Structures of Fiberglass and Ice". *International Colloquium on Structural Morphology Towards the New Millenium*. University of Nottingham, 1997. Ed.: J.C. Chilton, B.S. Chao, W.J. Lewis and O. Popovic

Kawaguchi, M. et Abe, M.

- 1992 "Design and Contruction of Sant Jordi Sports Palace; avenue for Barcelona Olympics". *Bulletin of IASS*. vol. 33-2 n. 109 august-1992, p. 69-88.

Kincaid, Rex K.; Padula, Sharon L.

- 1990 "Minimizing Distortion and Internal Forces in Truss Structures by Simulated Annealing ". *AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, Collection of Technical Papers, New York, NY., USA: AIAA, part 1, 1990, p.327-333.

Kirkpatrick, S. Gellatt, C.D. et Vecchi, M. P.

- 1983 Optimization by simulated annealing, *Science*, 220 pp.671-680

Koumousis, Vlas K.; Georgiou, Panos G.

- 1994 "Genetic algorithms in discrete optimization of steel truss roofs". *Journal of Computing in Civil Engineering*, vol. 8, no. 3, Jul. 1994, p.309-325.

Kresling, B

- 1997 "Self-Deployable Tubular Systems in Nature and Engineering". *International Colloquium on Structural Morphology Towards the New Millenium*. University of Nottingham, 1997. Ed.: J.C. Chilton, B.S. Chao, W.J. Lewis and O. Popovic.

Kumagai, T. et Ogaw, T.

- 2003 " Dynamic bucking behaviour of single layer lattice domes subjected to horizontal step wave", *Journal of The International Association for Shell and Spatial Structures*. Vol. 44 n. 3, 2003. pp:167-174.



Kwan-Soon, P.; Hyun-Moo, K.

- 2004 "Preference-based optimum design of an integrated structural control system using genetic algorithms", *Advances in Engineering Software*. vol. 35. 2004, p. 85-94.

Lackner, R; Mang, H.

- 2002 "Mesh generation and mesh refinement procedures for the analysis of concrete shells". *Advances in Engineering*, vol. 33, 389-402.

Lapume, D.; Guerlement, G.; Lamblin, D.

- 2000 "Implementation of Simulated Annealing to the Optimal Plastic Design of Solid Cylindrical shells without Axial Loading" *Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMASS 2000 Barcelona 11-14 September 2000.

Lin, C.-Y. & Hajela, P.

- 1992 "Genetic Algorithms in Optimization Problems with Discrete and Integer Design Variables". *Eng. Optimization*, Vol. 19, pp. 309-327.

McMahon, Thomas A. et Bonner, John T.

- 1986 *Tamaño y vida*. Barcelona: Colección Biblioteca Scientific American. Prensa Científica (traducción al castellano por Rosa Martínez Silvestre).

Michell, A. G. M.

- 1904 "The limits of Economy of Material in Frame-structures", *Philosophical Magazine*, S. 6 v. 8 n°47

Moisset de Espanes. Daniel

- 1999 *Diseño de Estructuras Laminas por Computadora*. Seminario Monográfico sobre Métodos de Proyecto de Formas Óptimas de Estructuras Laminas en Arquitectura, Facultad de Arquitectura. Universidad Nacional de Córdoba. (manuscrito facilitado por el autor)

Nash, S. G.; Sofer, A.

- 1996 *Linear and Nonlinear Programming*. New York MacGraw-Hill Companies, Inc.

Ohmori H. , Yamamoto K.

- 1998 "Shape optimization of shell and spatial structures for specified stress distribution". *Bulletin of the IASS*. vol. 39-3 diciembre 1998 n. 128 pp. 147-157

Otto, Frei

- 1981 "Cubierta de red metálica". *Informes de la Construcción*, No. 330, 1981, pp. 27-28.
- 1971 "Frei Otto at work". *AD*, marzo 1971, pp. 137-167
- 1967 *Tensile Structures*. Cambridge, Massachussets and London, England. The MIT Press, (Primera edición en Alemania bajo el título de Zugbeanspruchte Konstruktionen en 1962)

Orta, B et Rodriguez de Rivas, J

- 1999 *Métodos avanzados de análisis de Estructuras – Ejemplos prácticos con Ansys*. Cuadernos del Instituto Juan de Herrera, Escuela Técnica Superior de Arquitectura Madrid..

Pantenides, C.P.; et Tzan, S.-R..

- 2000 "Modified iterated simulated annealing algorithm for structural synthesis". *Advances in Engineering Software*. vol. 31. 2000, p. 391-400.

Pedregal Tercero, P.

- 2004 *Introduction to optimization*. New York: Springer, cop. (Ejemplar prestado por Carlos Corona, ETSICCP)

Pérez Ruy-Díaz, J.A. et Pérez Jimenez, L.

- 1993 "Optimización de estructuras mediante algoritmos genéticos". *Actas del congreso AREC DAO-93*. (Copia facilitada por Valentín Quintas a Mariano Vázquez).

Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T. et Flannery, Brian P.

- 1992 *Numerical Recipes in C, The art of Scientific Computing*. USA, Massachusetts: Cambridge University Press, 2ª edición (en la web con permiso únicamente para el uso personal: <http://www.nr.com> y <http://lib-www.lanl.gov/numerical/bookcpdf.html>)

Quintas Ripoll, V.

- 1995 *Estructuras especiales en edificación análisis y cálculo*. Editorial Rueda, S.L. Madrid.

Rajan, S.D.

- 1995 "Sizing, shape, and topology design optimization of trusses using genetic algorithm", *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, no. 10, Oct 1995, p.1480-1487.

Rajeev, S.; Krishnamoorthy, C. S.

- 1992 "Discrete optimization of structures using genetic algorithms", *Journal of Structural Engineering*, vol. 118, no. 5, May. 1992, p.1233-1250.
- 1997 "Genetic Algorithms-Based Methodologies for Design optimization of Trusses". *Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 3, Mar. pp. 350-358. (Copia facilitada por Mariano Vázquez)

Ramm, E.

- 2004 "Shape Finding of Concrete Shell Roofs", *Bulletin of IASS*, vol. 45, nº 144, pp. 29-39.
- 1997 "Glass as Structure". *Proceedings of the IASS International Symposium on Shells and Spatial Structures*, Singapore, 1997. Ed.: S.P. Chiew-Nanyang, Technological University Singapore.
- 1992 "Shape Finding Methods of Shells", *Bulletin of IASS*, vol. 33, nº 109, pp. 89-98. (copia facilitada por Mariano Vázquez).
- 1992b "Force Follows Form in Shell Design". *Proceedings of IASS-CSE Int. Congress 1992 on Innovative Large Span Structures*, Ed.: Srivastava et al. CSCE Publication 1992, 11-27.}

Ramm, E.; Braun M.; et Bischoff M.

- 1995 "Higher Order Nonlinear Shell Formulations - Theory and Applications". *International Symposium on Spatial Structures: Heritage, Present and Future*, vol. 1, 1995, Milan-Italia. Ed.: G. C. Giuliani pp. 393-400.

Ramm, E. et Schunck, E.

- 1989 *Heinz Isler, Schalen: Katalog zur Ausstellung*, Stuttgart: Karl Krämer Verlag (ejemplar facilitado por el autor, traducido por Susana Díaz).

Ramm, E. et alli: Bletzinger, K.-U.; Reitinger, R.

- 1993 "Shape Optimization of Shell Structures", *Bulletin of IASS*, vol. 34, nº 112, pp. 103-121.

Real Academia Española

- 2001 *Diccionario de la lengua española*. 22ª edición. Ed: Espasa-Calpe SA, Madrid. Colección: Diccionesarios Espasa. <http://www.rae.es/>

Roland, Conrad

- 1966 "Frei Otto's pneumatic structures". *Architectural Design*, julio 1966, pp. 341-360.

Saether, Kolbjorn

- 1995 "Structural Membrane Approach for the Design of Shells". *International Symposium on Spatial Structures: Heritage, Present and Future*, vol. 1, 1995, Milan-Italia. Ed.: G. C. Giuliani pp. 393-400.

Schildt, Herbert

- 1987 *Lenguaje C. Programación avanzada*. Mexico: Osborne/McGraw-Hill

Schmid, Laurence

- 1992 "Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms" (copia facilitada por Mariano Vázquez)

Soh, Chee Kiong; Yang, Jiaping.

- 1996 "Fuzzy controlled genetic algorithm search for shape optimization", *Journal of Computing in Civil Engineering*, vol. 10, no. 2, Apr 1996, p.143-150.

Sved, S.

- 1954 "The Minimum Weight of Certain Redundant Structures". *Australian J. Appl. Sci.* Vol., 5, pp. 1-9.

Swaddiwudhipong, S.; Koh, C. G. et Liu, Z. S.

- 2002 "Numerical Study of Shell Structures under Low Velocity Impact", *Journal of The International Association for Shell and Spatial Structures*. Vol. 43 n. 3, 2002. pp:159-170.

Szewczyk, Z.; Hajela, P.

- 1993 "Neural network approximations in a simulated annealing based optimal structural design". *Structural Optimization*, West Germany, vol. 5, no.3, Feb. 1993, p.159-65.

Tesler, Lawrence G.

- 1984 "Lenguajes de programación". *Investigación y Ciencia*, n. 98, noviembre 1984, pp. 36-45.

Thompson, D'Arcy

- 1961 *Sobre el crecimiento y la forma*, Madrid: Cambridge University Press Ed. Abreviada editada por Jhon Tyler Bonner, (traducción de "On growth and form", 1st. abridged ed., 1961 por Ana María Rubio Díez y Mario X. Ruiz-González, 2003)

Ting-Yu Chen, Jyh-Jye Su

- 2002 "Efficiency improvement of simulated annealing in optimal structural designs". *Advances in Engineering*, vol. 33, 675-680.

Topping, B.H.V.; Khan, A.I. et Barros Leite J. P.

- 1993 "Topological Design of Truss Structures Using Simulated Annealing". *Proc., Neural Networks and Combinational Optimization in Civil and Structural Engineering* Edinburgh, UK: Civil-Comp Press.

Tzan, Shyh-Rong et Pantelides, Chris P.

- 1996 "Annealing Strategy for Optimal Structural Design". *Journal of Structural Design*. July 1996

Vázquez Espí, Mariano.

- 1994 *El recocido simulado: un nuevo algoritmo para la optimación de estructuras*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. (ejemplar facilitado por el autor).
- 1995 "El recocido simulado: un nuevo algoritmo para la optimación de estructuras" *Informes de la Construcción*. Vol. 46, No. 436, marzo - abril 1995, pp. 49-69.
- 1996 "La evolución de los paradigmas científicos: desde Galileo al 'caos'.". Curso de Doctorado Ciudad, arquitectura y ecología. Editado por el Departamento de Urbanística y Ordenación del territorio. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, 1996.
- 1996a "Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm" *Journal of Structural Engineering*, v.124, pp. 979-980 (copia facilitada por el autor)
- 1997 "Discussion of 'Fuzzy Controlled Genetic Algorithm Search for Shape Optimization' by C.K.Soh & J.Yang" *Journal. of Computing in Civil Engineering*, v. 11, pp. 213-214)
- 1997a "Los límites de la técnica" *Ciudad y territorio*, vol XXIX, número 111, pp. 65-79. (Ahora también en Boletín CF+S, n.3, <http://habitat.aq.upm.es/boletin/n3/amvaz.html>)
- 1998 "Discussion of 'Genetic Algorithms-Based Methodologies for Design optimization of Trusses' by S. Rajeev and S. Krishnamoorthy". *Journal of Structural Engineering*, v.124, pp. 979-980 (copia facilitada por el autor)
- 2002 "Los algoritmos genéticos, o lo que «no» es la evolución." *Boletín CF+S* n.21 <http://habitat.aq.upm.es/boletin/n21/amvaz.html>

Vázquez Espí, Carlos et Vázquez Espí, Mariano

- 1997 "Discussion of 'Sizing, Shape and Topology Design of Trusses Using Genetic Algorithm' by S.D.Rajan". *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, pp. 375-376.

Wester, Ture

- 1997 "Some Remarkable Statical Qualities of Structures in Nature". *International Colloquium on Structural Morphology Towards the New Millenium*. University of Nottingham, 1997. Ed.: J.C. Chilton, B.S. Chao, W.J. Lewis and O. Popovic.

Wirth, Niklaus

- 1984 "Algoritmos y estructuras de datos". *Investigación y Ciencia*, n. 98, noviembre 1984, pp. 24-35.

Yamazaki, K. et Han, J.

- 2000 "Maximization of the crushing energy absorption of cylindrical shells". *Advances in Engineering Software*. vol. 31. 2000, p. 425-434.

Yang, R.L.

- 2000 "Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization" *Journal of Optimization Theory and Applications* 104 vol. 3 pp.:691-716, March 2000.

# Fe de erratas